

الصف الثاني الثانوي – القسم الادبي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الأول: .الدوال الحقيقية

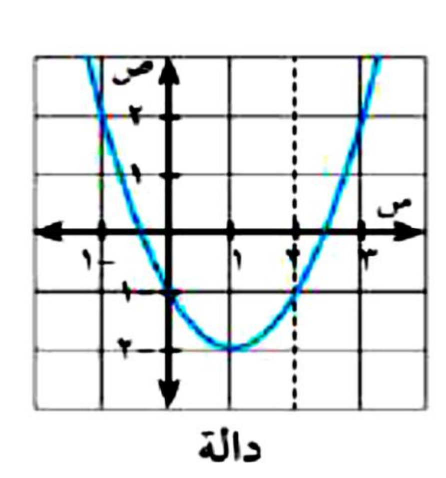
ملخص الدرس:

– مفهوم الدالة الحقيقية

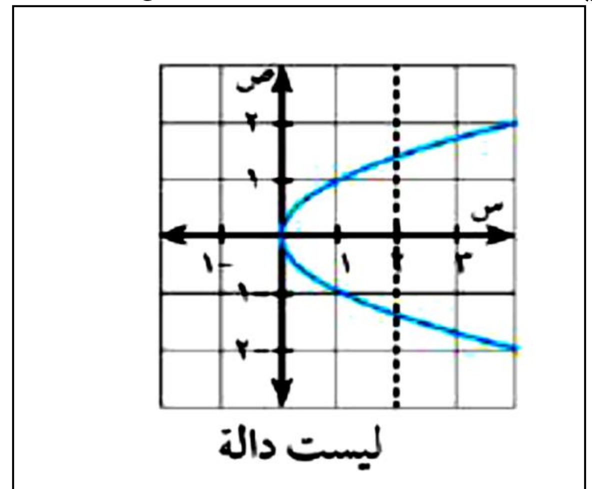
هي دالة كل من مجالها ومجالها المقابل ح (مجموعة الاعداد الحقيقية) أو مجموعة جزئية منها

– اختبار الخط الرأسي للتعرف على الدالة

إذا كان الخط الرأسي عند كل عنصر من عناصر المجال يقطع منحى العلاقة الممثلة بيانيا في نقطة واحدة فقط كانت هذه العلاقة تمثل دالة و إذا وجد خط رأسي يقطع منحنى العلاقة في أكثر من نقطة فإن العلاقة لا تمثل دالة



دالة



ليست دالة

- تحديد مجال ومدي الدالة

<u>أولا : بيانيا</u>

إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة ص= د(س) فإن

مدى الدالة =[جـ ، ء] ، مجال الدالة = [٢ ، ب]

ص
مدى الدالة
ء
جـ
سَ
ص َ
أ
ب
س
مجال الدالة

في الشكل البياني الممثل للدالة د
مجال الدالة = [أ ، ب]
مدى الدالة = [جـ ، ى]

ثانيا :جبريا

يتحدد مجال الدالة جبريا حسب نوع الدالة

١- أي دالة كثيرة الحدود مجالها ح (مجموعة الاعداد الحقيقية) ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها .

أمثله دوال كثيرات الحدود

د(س) = ٧ الدالة الثابتة ، مجالها ح

د(س) = ٢س+ ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الاولى (دالة خطية) ، مجالها ح

د(س) = س^{٢}+ س-٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (دالة تربيعية) ، مجالها ح

د(س) = س^{٣}+ ١ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية) ، مجالها ح

٢- إذا كانت ق(س) = $\sqrt[ن]{\text{د (س)}}$ حيث د كثيرة حدود فإن

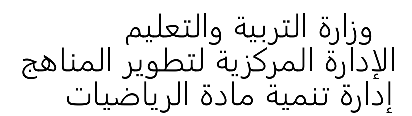
اولا: مجال ق هو ح عندما تكون ن عدد فردي > ١

ثانيا: مجال ق = { س : س ∈ ح ، د (س) ≥ ٠ } عندما ن عدد زوجي > ١

٣- إذا كانت ق(س) = $\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}}$ حيث كل من د ، هـ دوال كثيرات حدود

فإن مجال ق هو ح - مجموعة أصفار المقام





-العمليات على الدوال

إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالاهما $م_1$ ، $م_2$ على الترتيب ، فإن:

١ - $(د_1 \pm د_2)(س) = د_1(س) \pm د_2(س)$ ، مجال $(د_1 \pm د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$

٢ - $(د_1 . د_2)(س) = د_1(س) . د_2(س)$ ، مجال $(د_1 . د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$

٣ - $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2(س) \neq ٠$ مجال $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)$ هو $(م_1 \cap م_2) - ف(د_2)$

حيث $ف(د_2)$ مجموعة أصفار $د_2$

أمثلة محلول

مثال محلول (١): الشكل المقابل يمثل العلاقة البيانية بين س ، ص

فهل ص دالة في س ، وإذا كانت هذه العلاقة دالة فعين المجال والمدي

الحـــــــــــــــــــــل

العلاقة البيانية تمثل دالة من س إلى ص لأن كل خط رأسي مرسوم

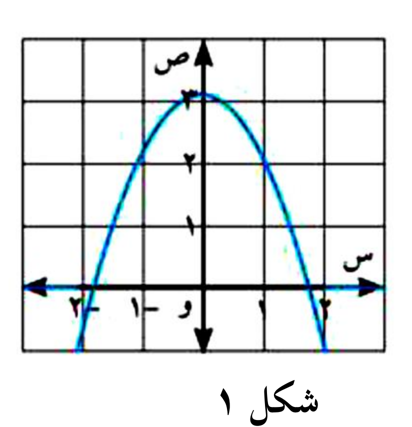
يقطع المنحنى في نقطة واحدة.

مجال الدالة = [ـ ٢ ، ٥]

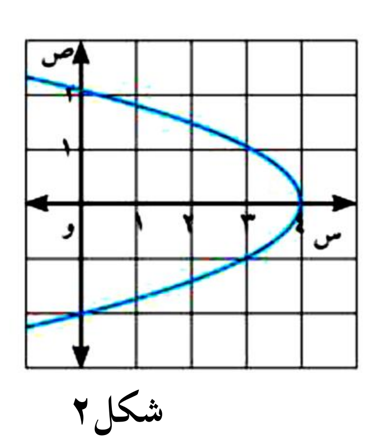
مدى الدالة =] ١ ، ٥]



تدريب (١):



شكل ١



شكل٢

في الاشكال السابقة بين ما إذا كانت ص تمثل دالة في س أم لا ؟

مثال محلول (٢):

حدد مجال كل من الدوال التالية:

$د(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ١}$ ، $ر(س) = \frac{س + ١}{س^٢ + ١}$

الحل

مجال د = ح − مجموعة اصفار المقام

$س^٢ - ١ = ٠ \leftarrow س = \pm ١$

مجال د = ح − $\{ ١ ، - ١ \}$

مجال ر = ح − مجموعة اصفار المقام

، حيث أن $س^٢ + ١ \neq ٠$ لجميع قيم س الحقيقية

$\therefore$ مجال ر = ح

تدريب (٢):

حدد مجال كل من الدوال التالية:

$د(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - س}$

$ر(س) = \frac{٢س}{س^٢ + س - ٦}$



وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
إدارة تنمية مادة الرياضيات

حلول التدريبات:

حل تدريب (١): شكل (١) دالة – شكل (٢) ليست دالة

حل تدريب (٢): مجال د = ح - { ٠ ، ١ } ، مجال ر = ح - { ٢ ، -٣ }

تمارين على الدرس الأول

اختر الاجابة الصحيحة

١) مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{٢ - س}$ هو................

(أ) ح – { ١ }　　(ب) [٠ ، ∞ [　　(ج) [٢ ، ∞ [　　(د)] - ∞ ، ٢]

٢) إذا كان الجدول المقابل يمثل بيان كل من الدالتين د ، ر

فإن (ر - د) (١) = ...

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٣	١	٤	٢
ر(س)	٤	٣	٢	١

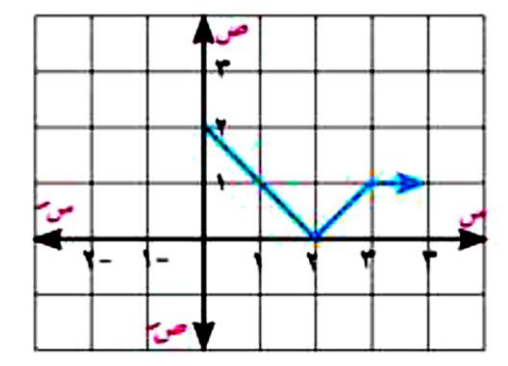
(أ) ١　　(ب) ٢　　(ج) ٣　　(د) ٤

٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل الرسم البياني للدالة د

فإن مدى الدالة د = ...

(أ) ح　　(ب) [٠ ، ∞ [

(ج) [٠ ، ٢ [　　(د)] ٠ ، ٢]





٤) إذا كان د(س) = $س^٢$ + ٣ ، هـ(س) = ٢ س ـ ١ فإن (د + هـ)(١) =.........

(أ) ٢ (ب) ٤

(ج) ٥ (ء) ٦

٥) إذا كان د(س) = $س^٢$ + ٣ ، هـ(س) = ٢ س ـ ١ فإن (د × هـ)(١) =.........

(أ) ٢ (ب) ٤

(ج) ٥ (ء) ٦

٦) مجال الدالة د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ)] ٤ ، ∞ [(ب) [٤ ، ∞ [

(ج)] - ∞ ، ٤] (ء)] - ∞ ، ٤ [

٧) إذا كان د(س) = $\sqrt{س}$ ، هـ(س) = | س | فإن مجال (د + هـ) =.........

(أ) ح (ب) [٠ ، ∞ [

(ج)] ٠ ، ∞ [(ء) ∅

٨) إذا كان د(س) = $\sqrt{س}$ ، هـ(س) = | س | فإن مجال (هـ ÷ د) =.........

(أ) ح (ب) [٠ ، ∞ [

(ج)] ٠ ، ∞ [(ء) ∅

٩) إذا كان د(س) = $\sqrt[٣]{س - ٢}$ فإن مجال د =.........

(أ) ح (ب) [٢ ، ∞ [

(ج)] ٢ ، ∞ [(ء) ∅



١٠) إذا كان د(س) = $\sqrt{س - ١}$ ، هـ(س) = $\sqrt{١ - س}$ فإن مجال (هـ × د) =.........

(أ) ح (ب) [١ ، ∞ [

(ج) { ١ } (ء) ∅

حلول تمارين على الدرس الأول:

١) ء	٢) أ	٣) ء	٤) ج	٥) ب
٦) ب	٧) ب	٨) ج	٩) أ	١٠) ج

الصف الثاني الثانوي – القسم الادبي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الثاني : اطراد الدوال

ملخص الدرس:

- **ماذا نعنى باطراد الدوال ؟**

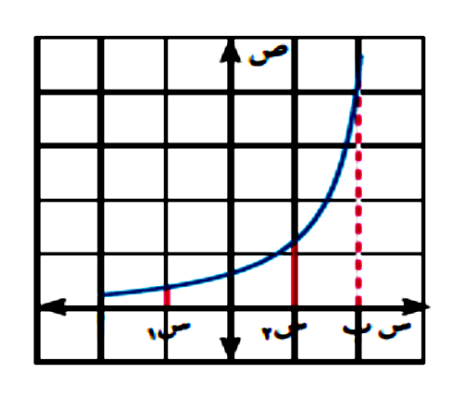
يقصد باطراد الدوال معرفة الفترات التي تكون فيها الدالة تزايدية أو تناقصية أو ثابتة.

تزايد الدالة:

يقال للدالة د أنها تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈]أ ، ب[حيث: $س_2 > س_1$

فإن: $د(س_2) > د(س_1)$

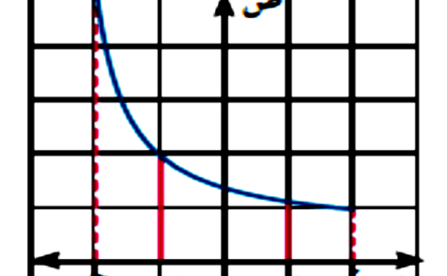


تناقص الدالة:

يقال للدالة د أنها تناقصية فى الفترة]جـ ، ى[

إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈]جـ ، ى[حيث: $س_2 > س_1$

فإن: $د(س_2) < د(س_1)$

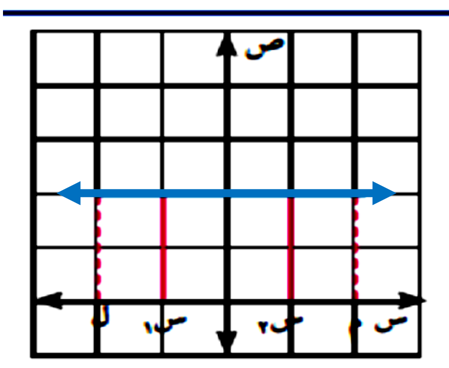


ثبوت الدالة:

يقال للدالة د أنها ثابتة فى الفترة]ل ، م[

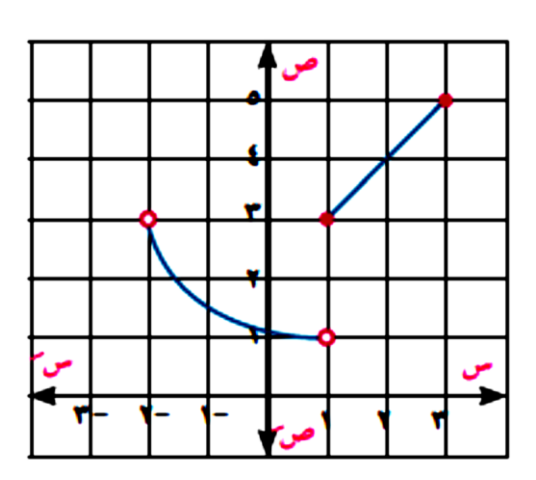
إذا كان لكل $س_1$، $س_2$ ∈]ل ، م[حيث: $س_2 > س_1$

فإن: $د(س_2) = د(س_1)$



أمثلة محلول

مثال محلول (١):



الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني لدالة د ، استعن بالرسم في الاجابة عن الاسئلة التالية:

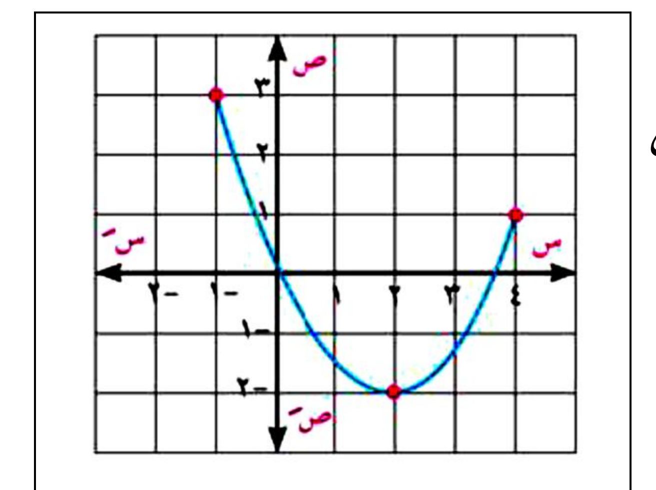
- **عين مجال ومدى الدالة**
- **ابحث اطراد الدالة**

الحــــــــــــل

- المجال =] -٢ ، ٣ [، المدى =] ١ ، ٥ [
- الاطراد

الدالة تناقصية في] -٢ ، ١ [، الدالة تزايدية في] ١ ، ٣ [

تدريب (١):



الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني لدالة د ، استعن بالرسم في الاجابة عن الاسئلة التالية:

- **عين مجال ومدى الدالة**
- **ابحث اطراد الدالة**





مثال محلول (٢):

الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني لدالة د ، استعن بالرسم في الاجابة عن الاسئلة التالية:

- **عين مجال ومدى الدالة**
- **ابحث اطراد الدالة**

الحـــــــــــل

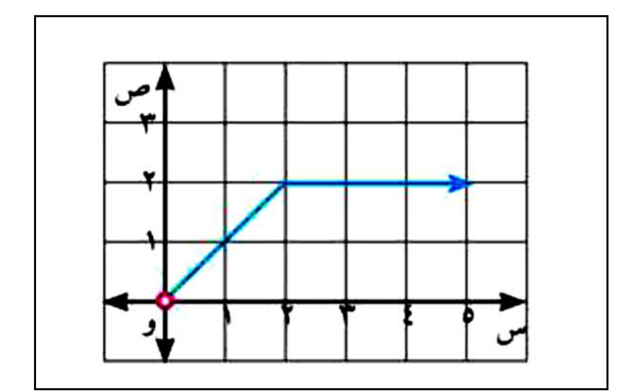
- المجال =] − ∞ ، ١] ∪] ٢ ، ∞ [= ح −] ١، ٢]

المدى =] − ∞ ، ٤]

- الاطراد

الدالة ثابتة في] − ∞ ، ١] ، الدالة تناقصية في] ٢ ، ∞ [

تدريب (٢):



الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني لدالة د ، استعن بالرسم في الاجابة عن الاسئلة التالية:

- **عين مجال ومدى الدالة**
- **ابحث اطراد الدالة**



حلول التدريبات

حل تدريب (١):

المجال = [– ١ ، ٤] ، المدى = [– ٢ ، ٣]

الاطراد:

الدالة تناقصية في] – ١ ، ٢ [، الدالة تزايدية في] ٢ ، ٤[

حل تدريب (٢):

المجال = [٠ ، ∞ [، المدى = [٠ ، ٢]

الاطراد:

الدالة تزايدية في] ٠ ، ٢[، الدالة ثابتة في] ٢ ، ∞ [

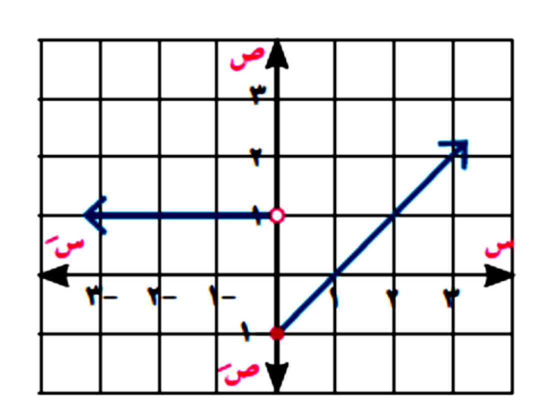
تمارين على الدرس الثاني:

اختر الإجابة الصحيحة :

١) إذا كان الشكل المقابل يمثل الرسم البياني للدالة د فإن الدالة د تكون ثابتة في ....

(أ)] -٣ ، ٠ [(ب)] - ∞ ، ٠ [

(ج)] - ∞ ، ١ [(د)] ١ ، ∞ [



٢) في الشكل السابق د تكون تزايدية في...............

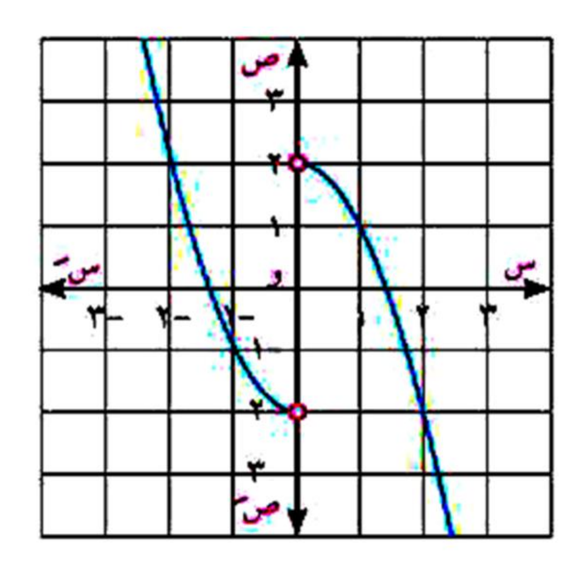
(أ)] ١ ، ٢ [(ب)] - ∞ ، ٠ [

(ج)] ٠ ، ∞ [(د)] ١ ، ∞ [



٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني لدالة د

فإن الدالة د تكون ....



أ) تزايدية في] - ∞ ، ٠ [

ب) تزايدية في] - ٢ ، ٢ [

ج) تناقصية في] - ∞ ، ∞ [

ء) تناقصية في] ٠ ، ∞ [

٤) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن أحدى فترات التزايد للدالة د هي ....

أ)]١ ، ∞ [

ب)]٠ ، ∞ [

ج)] – ∞ ، ٠ [

ء)]٠ ، ١ [

٥) الدالة د : د(س) = -٤ تكون

أ) تزايدية دائما ب) تناقصية دائما

ج) ثابتة دائما ء) تناقصية ثم متزايدة

٦) الدالة د : د(س) = جاس تكون دالة....

أ) تزايدية ب) تناقصية

ج) ثابتة ء) فردية



٧) الدالة د : د(س) = ـ س تكون.......

ⓐ تزايدية دائما　　ⓑ تناقصية دائما

ⓒ ثابتة دائما　　ⓓ تناقصية ثم متزايدة

٨) إذا كانت د دالة تناقصية في]- ٢ ، ٢ [فإن ....

ⓐ د(٠)= ٠　　ⓑ د(٠) < د(ـ ١)

ⓒ د(٠) > د(ـ ١)　　ⓓ د(١) = د(ـ ١)

٩) إذا كانت د دالة تزايدية على مجالها فإن قاعدة الدالة يمكن أن تكون د(س)=.....

ⓐ ـ $س^٢$　　ⓑ $س^٢$

ⓒ $\sqrt{س}$　　ⓓ ـ $\sqrt{س}$

١٠) الدالة د : د(س) = $قا^٢$ س ـ $ظا^٢$ س حيث س ∈ [٠ ، ٩٠° [تكون دالة ......

ⓐ **تزايدية**　　ⓑ **تناقصية**

ⓒ **ثابتة**　　ⓓ **تزايدية ثم تناقصية**

حلول تمارين على الدرس الثاني:

١) ب	٢) ج	٣) ء	٤) ٱ	٥) ج
٦) ء	٧) ب	٨) ج	٩) ج	١٠) ج



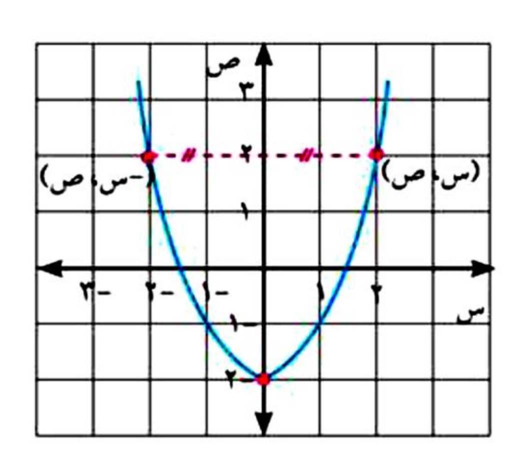
الصف الثاني الثانوي – القسم الادبي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الثالث: بعض خواص الدوال

ملخص الدرس:

– مفهوم الدالة الزوجية

الدالة ص = د (س) تكون زوجية إذا تحقق الشرط د(– س) = د (س) لكل س ، – س ∋ مجال الدالة



وإذا كانت الدالة ممثلة بيانيا فانها تكون زوجية إذا كانت متماثلة حول محور الصادات ونلاحظ أنه

إذا كانت (س ، ص) ∋ د و كانت د دالة زوجية

فإن (– س ، ص) ∋ د

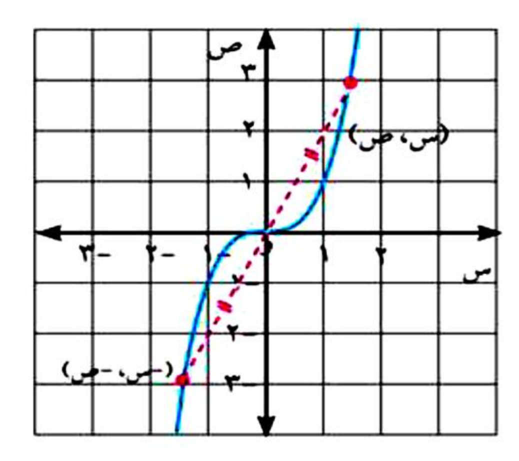
ومن امثلة الدوال الزوجية د(س) = س ^ن^ : ن عدد زوجي

، هـ(س) = جتاس ، د(س) = – ٣

– مفهوم الدالة الفردية

الدالة ص = د (س) تكون فردية إذا تحقق الشرط د (ـ س) = ـ د(س) لكل س ، ـ س ∋ مجال الدالة

وذلك إذا علمت قاعدة الدالة



وإذا كانت الدالة ممثلة بيانيا فانها تكون فردية إذا كانت متماثلة حول نقطة الاصل ونلاحظ أنه

إذا كانت (س ، ص) ∋ د و كانت د دالة فردية

فإن (– س ، – ص) ∋ د

ومن امثلة الدوال االفردية د(س) = س ^ن^ : ن عدد فردي

، هـ(س) = جاس ، ر(س) = ظا س



أمثلة محلول

مثال محلول (١): ابحث نوع كل دالة فيما يلي من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك

(أ) د(س) = س^{٢} + ٧ **(ب)** ر (س) = س^{٣} - س

الحـــــــــل

(أ) د(- س) = (- س)^{٢} + ٧
= س^{٢} + ٧
= د(س)
∴ د دالة زوجية

(ب) ر (- س) =(- س) ^{٣} – (- س)
= ـ س^{٣} + س
= ـ (س^{٣} – س)
= ـ ر (س)
∴ ر دالة فردية

تدريب (١):

ابحث نوع كل دالة فيما يلي من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك

(أ) د(س) = س^{٤} ــ س^{٢} + ١ **(ب)** ر (س) = س^{٥} + س

حلول التدريبات

حل تدريب (١): (أ) د دالة زوجية (ب) ر دالة فردية



تمارين على الدرس الثالث

اختر الاجابة الصحيحة

١) جميع الدوال التالية زوجية عدا

ⓐ د(س) = (س – ١)^{٢} ⓑ د(س) = جتا س

ⓒ د(س) = ٧ ⓓ د(س) = س جاس

٢) الدالة الفردية فيما يلي هي ....

ⓐ د(س) = (س – ١)^{٢} ⓑ د(س) = ٣

ⓒ د(س) = س^{٣} ⓓ د(س) = س جاس

٣) الدالة الفردية فيما يلي هي ....

ⓐ د(س) = ١ + س ⓑ د(س) = قاس + جتا س

ⓒ د(س) = س جتا س ⓓ د(س) = س^{٤} - ٣

٤) إذا كان د(س) = ۴ س^{٣} + ب س + جـ دالة فردية فإن جـ = ...

ⓐ صفر ⓑ ١

ⓒ ٢ ⓓ ٣



٥) إذا كان د(س) = م س^{٣} + ب دالة فردية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٨)

فإن م + ب^{٢} = ...

(م) ١ (ب) صفر

(ج) ٥ (ء) ـ ١

٦) إذا كان د(س) = (س – ١)^{٢} فإن ......

(م) د دالة فردية

(ب) د دالة زوجية

(ج) د ليست دالة زوجية و ليست فردية

(ء) د دالة زوجية و فردية

٧) إذا كان د(س) = | س | فإن ......

(م) د دالة فردية

(ب) د دالة زوجية

(ج) د ليست دالة زوجية و ليست فردية

(ء) د دالة زوجية و فردية

٨) **إذا كان $ص_١ = د(س)$ دالة زوجية ، $ص_٢ = س\ د(س)$ ، $د(س) \neq ٠$ لكل $س \in ح$**

فإن $ص_٢$ دالة ......

(أ) د دالة فردية

(ب) د دالة زوجية

(جـ) د ليست دالة زوجية و ليست فردية

(ء) د دالة زوجية و فردية

٩)

إذا كان $د(س) = \begin{cases} \frac{س - ٣}{٣ - س} & : س \neq ٣ \\ -١ & : س = ٣ \end{cases}$ **فإن د دالة ......**

(أ) فردية

(ب) زوجية

(جـ) احادية

(ء) زوجية واحادية

١٠) **إذا كان د دالة زوجية ،هـ دالة فردية وكان د(٢)=٥ ، هـ (-٢) = ٣ فإن د (-٢) +هـ (٢) =...**

(أ) ٨

(ب) -٨

(جـ) ٢

(ء) -٢



١١) إذا كانت د دالة زوجية فإن الدالة ق:

ق(س) = ٣ [د(س)]^{٢} + د(س) ـ ١ تكون دالة ....

(أ) زوجية (ب) فردية

(جـ) ليست زوجية ولا فردية (د) زوجية وفردية

حلول تمارين على الدرس الثالث:

١) أ ٢) جـ ٣) جـ ٤) أ ٥) أ

٦) جـ ٧) ب ٨) أ ٩) ب ١٠) جـ ١١) أ

الصف الثاني الثانوي – القسم الادبي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الرابع: التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

ملخص الدرس:

– **دوال كثيرات الحددود :**

الصورة العامة لدالة كثيرة الحدود هي :

د(س) = $أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + ... أ_1 س + أ_0$.

حيث$أ_ن ، أ_{ن-1} ، .. ، أ_1 ، أ_0 \in ح ، أ_ن \neq 0 ، ن \in ط$.تسمى الدالة السابقة دالة كثيرة حدود من درجة ن

ومن امثلتها

$د_1$(س) = ٣$س^2$ – ٧س + ١ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

$د_2$(س) = ٨س – ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الاولى

$د_3$(س) = ٤ دالة كثيرة حدود ثابتة

التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود

(١) الدالة الثابتة د(س) = أ : أ ∈ ح

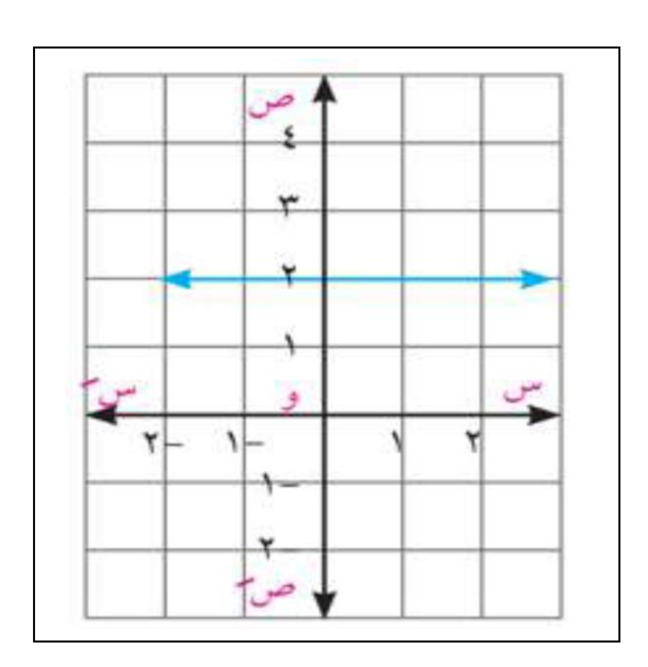
مثال : د(س) = ٢ دالة ثابتة

المجال = ح

المدى = {٢}

د دالة زوجية

الدالة ليست تزايدية ولا تناقصية ولكنها ثابتة على مجالها





(٢) الدالة الخطية د(س) = ۩ س + ب : ۩ ، ب ∋ ح ، ۩ ≠ ٠

مثال : د(س) = س

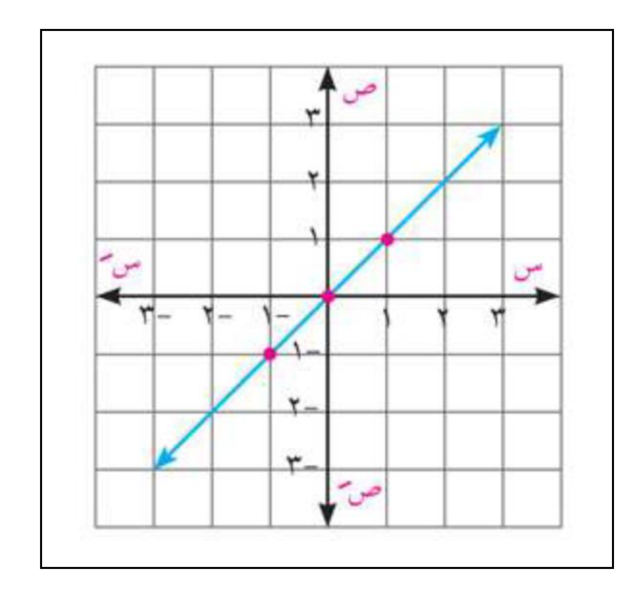
المجال = ح

المدى = ح

د دالة فردية

د تزايدية على مجالها

لاحظ أن التمثيل البياني لهذه الدالة هو خط مستقيم يمر بنقطة الاصل وميله = ١



---

(٣) الدالة التربيعية د (س)= ۩ س^{٢} +ب س + جـ : ۩ ،ب ،جـ ∋ ح ، ۩ ≠ ٠

مثال : د(س) = س^{٢}

المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞[

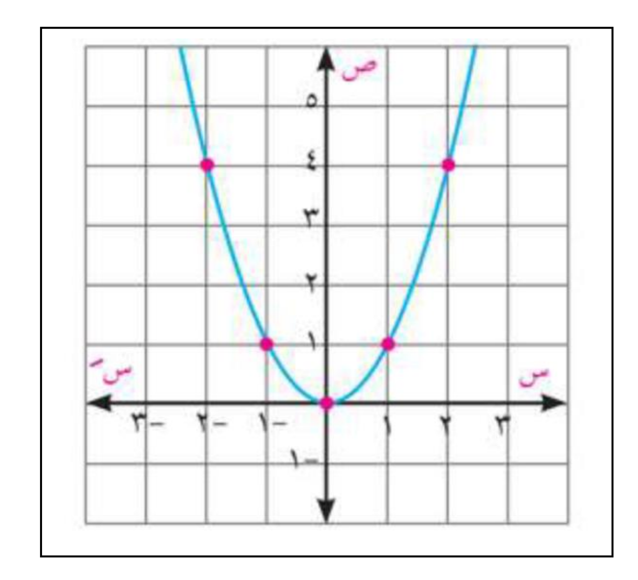
د دالة زوجية

منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات

نقطة رأس المنحنى هى النقطة (٠ ، ٠)

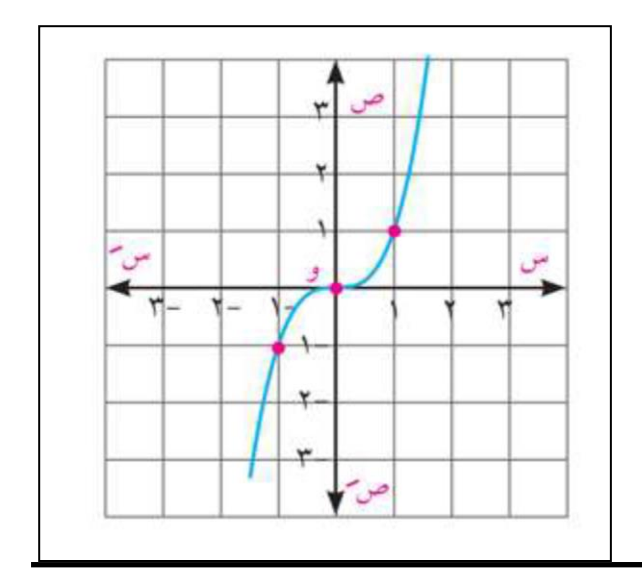
الدالة تناقصية في]- ∞ ، ٠]

الدالة تزايدية في [٠ ، ∞ [





(٤) الدالة التكعيبية د (س) = ٲ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء : ٲ ، ب ، جـ ، ء ∈ ح ، ٲ ≠ ٠



مثال : د(س) = س^{٣}

المجال = ح

المدى = ح

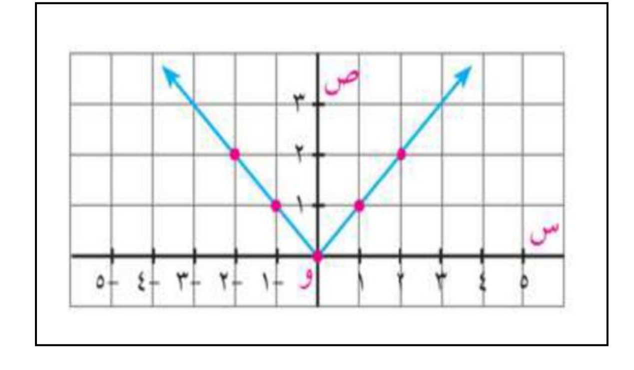
د دالة فردية

(منحنى الدالة متماثلة حول نقطة الاصل)

، الدالة تزايدية على مجالها

– التمثيل البياني لبعض دوال ليست كثيرات الحدود

١ـ دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)



أبسط صورة لدالة المقياس هي :

د(س) = |س| = { س : س ≥ ٠ ، ــ س : س < ٠ }

ونلاحظ أن : المجال = ح ، المدى = [٠ ، ∞[

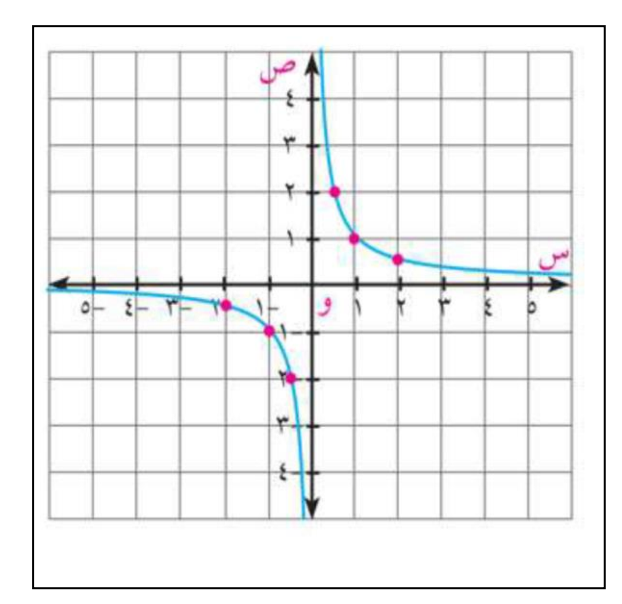
د دالة زوجية حيث أن الشكل البيانى للدالة متماثل حول محور الصادات

نقطة بداية الشعاعين هى النقطة (٠ ، ٠)

الدالة تناقصية في]- ∞ ، ٠ [، الدالة تزايدية في] ٠ ، ∞ [



٢ـ الدالة الكسرية



أبسط صورة للدالة الكسرية هي :

$$د(س) = \frac{١}{س}$$

المجال = ح ـ { ٠ } ، المدى = ح ـ { ٠ }

د دالة فردية حيث أن منحنى الدالة متماثل حول نقطة الاصل

الدالة تناقصية في كل من] - ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

(١) الازاحة الرأسية لمنحنى الدالة

باستخدام برنامج Geogebra

(أسال معلمك عن هذا البرنامج)

تم رسم ثلاث دوال د ، ق ، ك حيث

$د(س) = س^{٢}$

$ق(س) = س^{٢} + ٢$

$ك(س) = س^{٢} ـ ١$

نلاحظ من الرسم أن:

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإزاحة راسية قدرها ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

منحنى ك هو صورة لمنحنى د بإزاحة راسية قدرها ١ وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات



وبصفة عامة يكون :

لأي دالة ق : ق(س) = د(س) + ؏ يكون منحنى ق هو نفس منحنى د بإزاحة قدرها ؏ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات عندما ؏ > ٠ ، و في الاتجاه السالب لمحور الصادات عندما ؏ < ٠

(٢) الازاحة الافقية لمنحنى الدالة

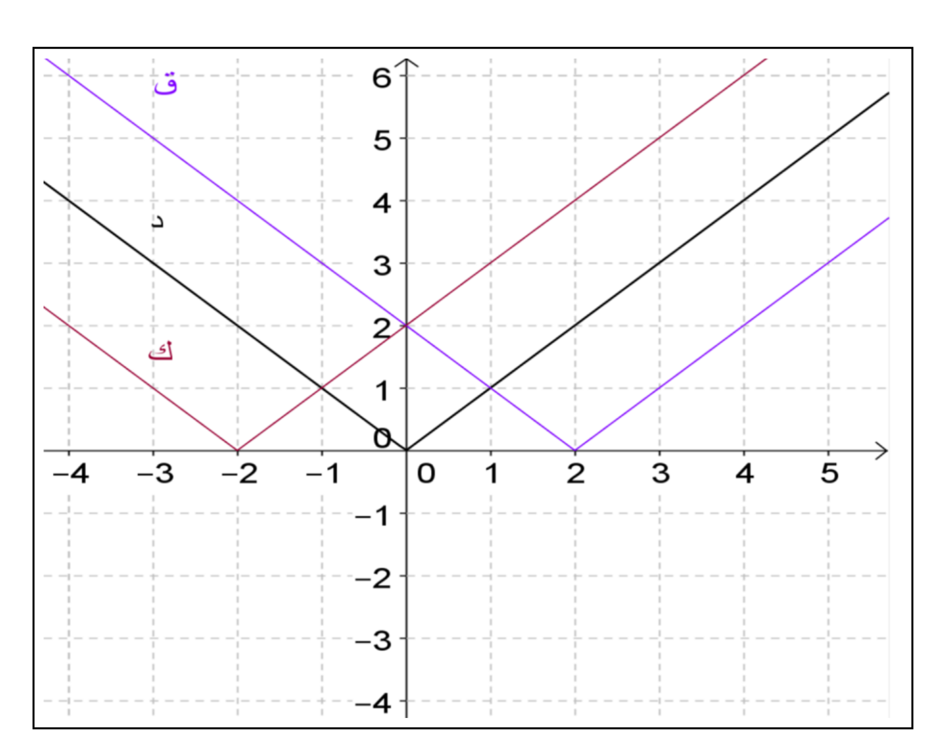
باستخدام برنامج Geogebra

تم رسم ثلاث دوال د ، ق ، ك حيث

د(س) = |س|

ق(س) = |س - ٢|

ك (س) = |س + ٢|



نلاحظ من الرسم أن

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات

منحنى ك هو صورة لمنحنى د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور السينات

وبصفة عامة يكون :

لأي دالة ق : ق(س) = د(س + ؏) يكون منحنى ق هو نفس منحنى د بإزاحة قدرها ؏ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات عندما ؏ < ٠ ، و في الاتجاه السالب لمحور الصادات عندما ؏ > ٠

(٣) انعكاس منحنى الدالة في محور السينات

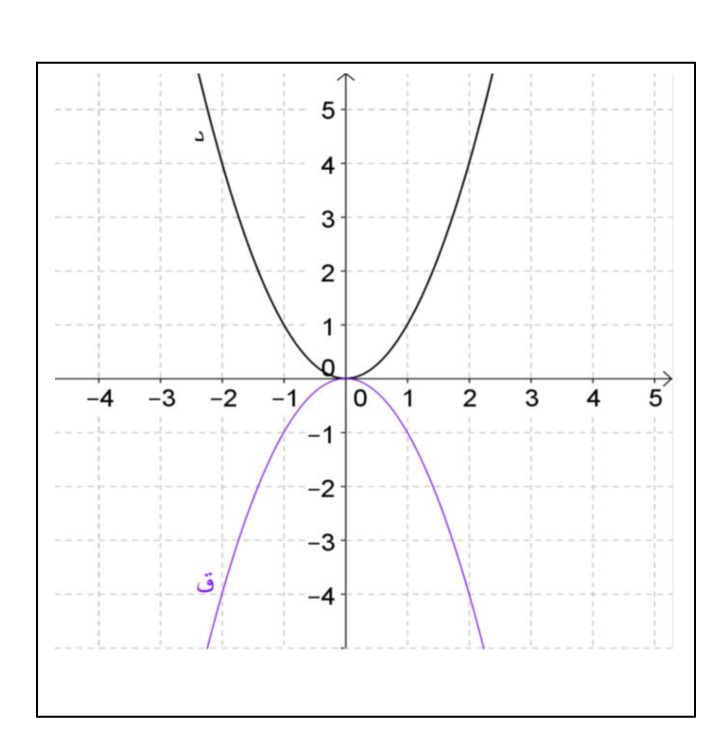
باستخدام برنامج Geogebra



تم رسم الدالتين د ، ق

د(س) = س^{٢}

ق(س) = - س^{٢}



نلاحظ من الرسم أن

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بالانعكاس في محور السينات

وبصفة عامة يكون :

لأي دالة ق: ق(س) =− د(س) يكون منحنى ق هو نفس منحنى د بالانعكاس في محور السينات

(٤) تمدد منحنى الدالة

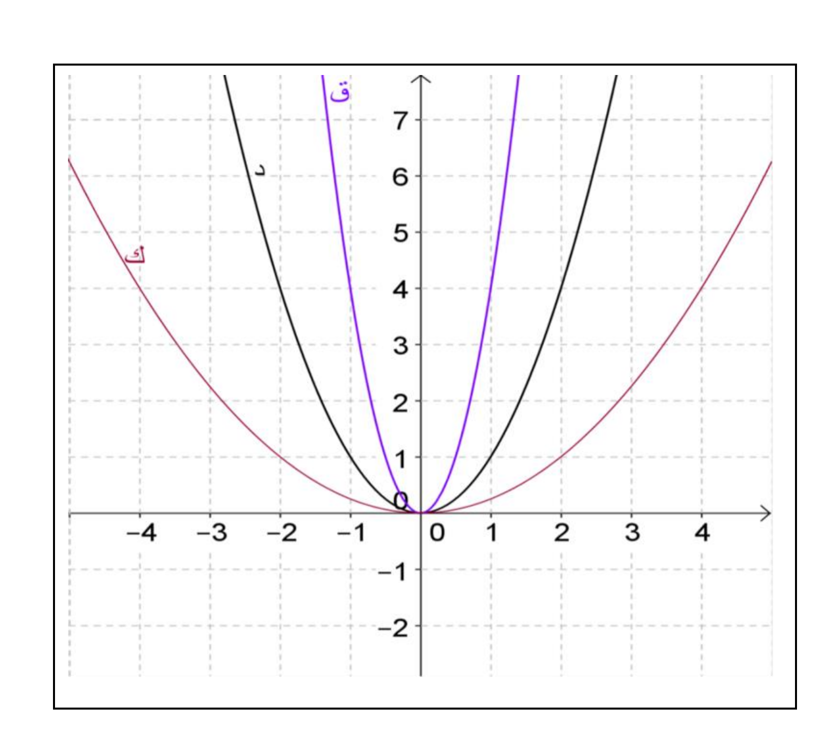
باستخدام برنامج Geogebra

تم رسم ثلاث دوال د ، ق ، ك حيث

د(س) = س^{٢}

ق(س) =٢ س^{٢}

ك (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢}



نلاحظ من الرسم أن



منحنى ق هو صورة لمنحنى د بتمدد رأسي (لاحظ معامل س ^{٢} في الدالة ق يساوي ٢ أي أكبر من ١)

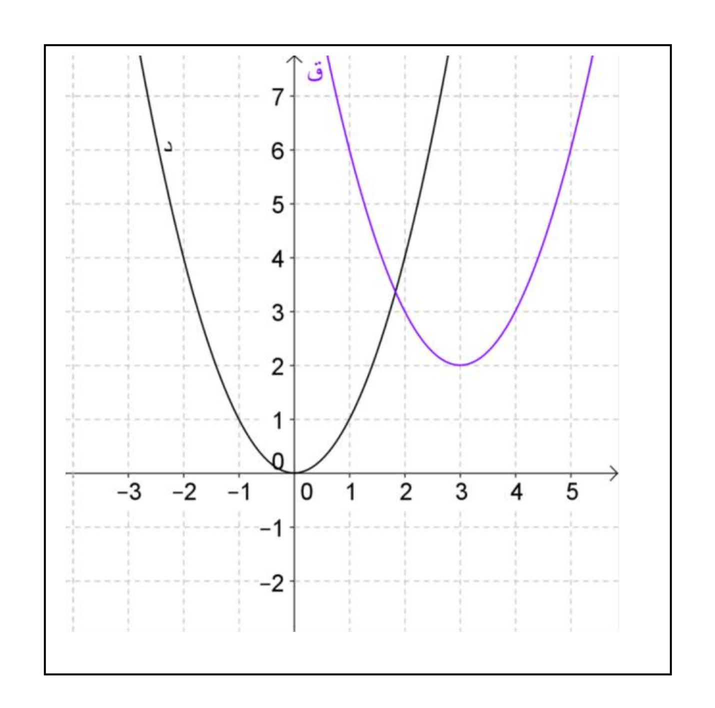
منحنى ك هو صورة لمنحنى د بإنكماش رأسي(لاحظ معامل س ^{٢} في الدالة ك يساوي $\frac{١}{٤}$ أي أنه عدد موجب أقل من ١)

وبصفة عامة يكون :

لأي دالة ق : ق(س) = أ د(س) يكون منحنى ق هو نفس منحنى د بتمدد رأسي عندما أ > ١

وإنكماش رأسي عندما ٠ < أ < ١

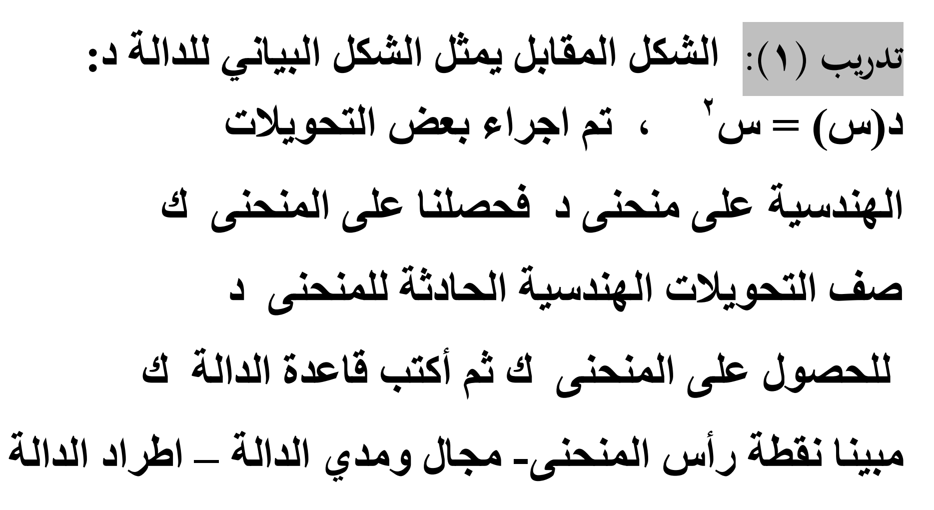
مثال محلول (١):



الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:
د(س) = س^{٢} ، تم اجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ق صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د للحصول على المنحنى ق ثم أكتب قاعدة الدالة ق مبينا نقطة رأس المنحنى- مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة

الحل

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم إزاحة ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات
قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = (س – ٣)^{٢} +٢
نقطة رأس المنحنى هي (٣ ، ٢) ، مجال ق = ح ، مدى ق = [٢ ، ∞[
ق تناقصية في] -∞ ، ٣] ، ق تزايدية [٣ ، ∞ [



تدريب (١): **الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:**

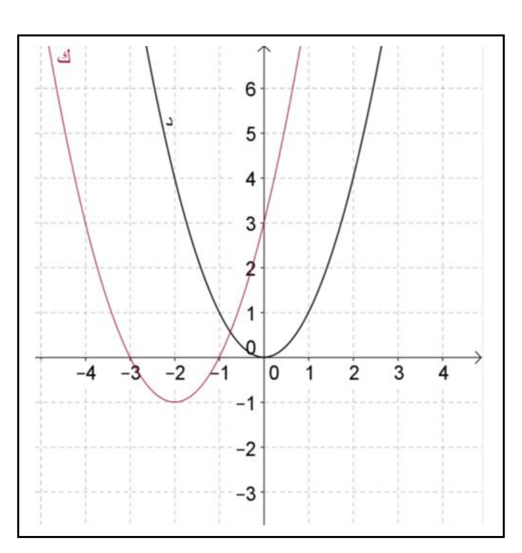
د(س) = س^{٢} ، تم اجراء بعض التحويلات

الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ك

صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د

للحصول على المنحنى ك ثم أكتب قاعدة الدالة ك

مبينا نقطة رأس المنحنى- مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة



مثال محلول (٢):

الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:

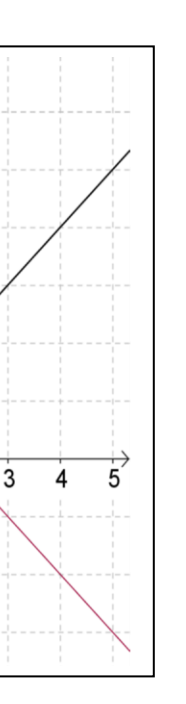
د(س) = |س| ، تم اجراء بعض التحويلات

الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ك

صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د

للحصول على المنحنى ك ثم أكتب قاعدة الدالة ك

مبينا نقطة بداية الشعاعين- مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة



الحـــــــل

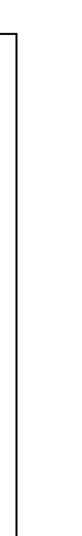
منحنى ك هو صورة لمنحنى د بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = ـ|س +١ | +٣

نقطة بداية الشعاعين هي (ـ ١ ، ٣) ، مجال ق = ح ، مدي ق =] - ∞ ، ٣]

ق تزايدية في] - ∞ ، ـ ١ [، ق تناقصية] ـ١ ، ∞ [

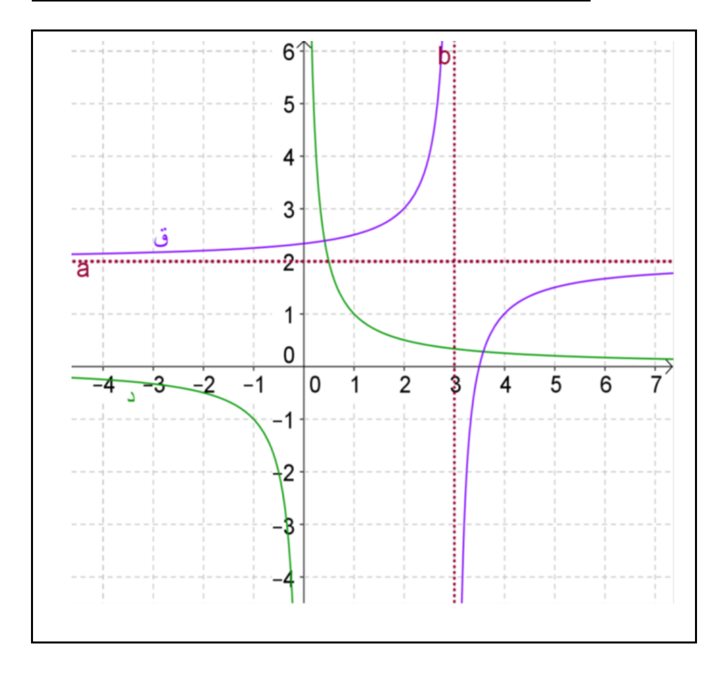
تدريب (٢):



الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:

د(س) = |س| ، تم اجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ك صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د للحصول على المنحنى ك ثم أكتب قاعدة الدالة ك مبينا نقطة بداية الشعاعين- مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة

مثال (٣):



الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:

د(س) = $\frac{١}{س}$ ، تم اجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ق صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د للحصول على المنحنى ق ثم أكتب قاعدة الدالة ق مبينا نقطة تماثل المنحنى – مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة

الحل

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإنعكاس في محور السينات ثم ازاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم إزاحة ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = – $\frac{١}{س - ٣}$ + ٢

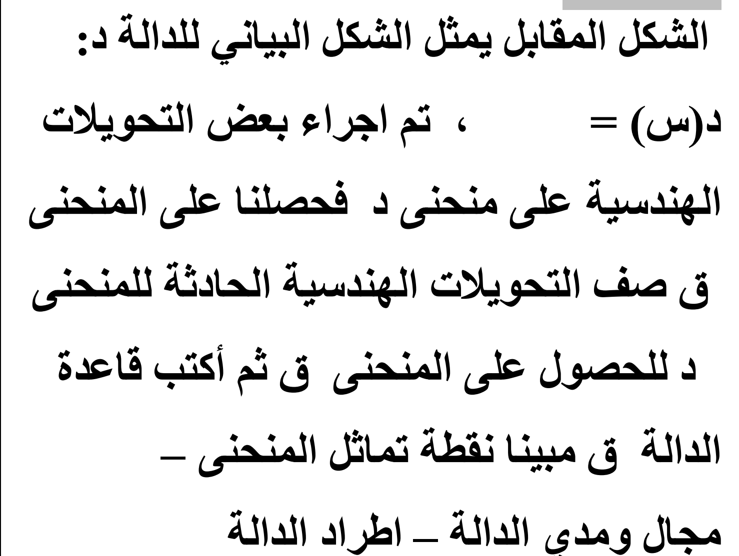
نقطة تماثل المنحنى هي (٣ ، ٢) ، المجال = ح – { ٣ } ، المدى = ح – { ٢ }

ق تزايديةفي] - ∞ ، ٣ [،] ٣ ، ∞ [



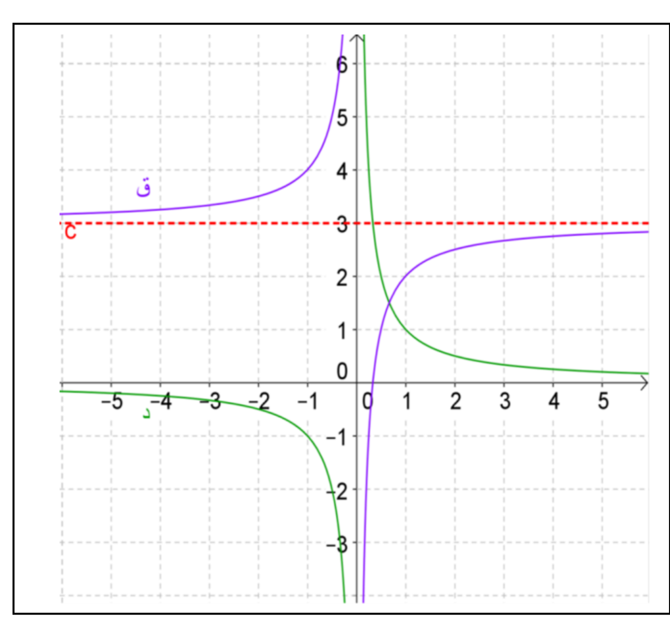


تدريب (٣)



الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:

د(س) =   ، تم اجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ق صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د للحصول على المنحنى ق ثم أكتب قاعدة الدالة ق مبينا نقطة تماثل المنحنى – مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة



حلول التدريبات

تدريب (١):

منحنى ك هو صورة لمنحنى د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور السينات ثم إزاحة وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات

قاعدة الدالة ك هي : ق(س) = (س +٢)^{٢} ــ ١

نقطة رأس المنحنى هي (ــ ٢ ، ــ ١) ، مجال ك = ح ، مدى ك = [ــ ١ ، ∞[

ك تناقصية في] - ∞ ، ــ ٢ [، ك تزايدية] ــ ٢ ، ∞ [

تدريب (٢):

منحنى ك هو صورة لمنحنى د بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم إزاحة ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = ــ|س ــ٢ | +٤

نقطة بداية الشعاعين هي (٢ ، ٤) ، مجال ق = ح ، مدي ق =] - ∞ ، ٤]

ق تزايدية في] - ∞ ، ٢ [، ق تناقصية] ٢ ، ∞ [

تدريب (٣):

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإنعكاس في محور السينات ثم ازاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = $-\frac{١}{س}$ + ٣

نقطة تماثل المنحنى هي (٠ ، ٣) ، المجال = ح − { ٠ } ، المدى = ح − { ٣}

ق تزايديةفي] − ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [

تمارين على الدرس الرابع: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

١) منحنى الدالة د : د(س) = س^{٢} + ٣ نحصل عليه بإزاحة منحنى الدالة هـ : هـ(س) = س^{٢} ٣ وحدات في اتجاه ....

Ⓐ $\overleftarrow{\text{وس}}$ Ⓑ $\overleftarrow{\text{وس}'}$

Ⓒ $\overleftarrow{\text{وص}}$ Ⓓ $\overleftarrow{\text{وص}'}$

٢) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س}$ + ١ هي ....

Ⓐ (٠ ، ١) Ⓑ (٠ ، −١)

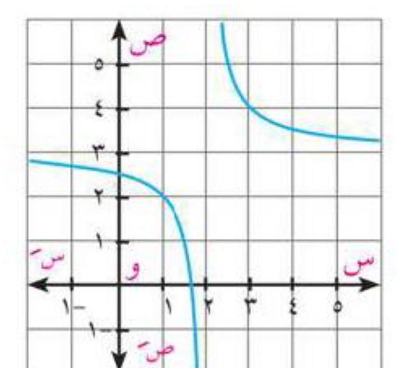
Ⓒ (١ ، ٠) Ⓓ (−١ ، ٠)

٣) نقطة رأس المنحى الدالة د : د(س) = (س + ٣)^{٢} − ٢ هي ....

Ⓐ (٣ ، −٢) Ⓑ (−٣ ، −٢)

Ⓒ (٣ ، ٢) Ⓓ (−٣ ، ٢)

٤) الشكل المقابل هو الشكل البياني للدالة د : د(س) =........



(أ) $\frac{١}{س+ ٢}$ + ٣

(ب) $\frac{١}{س+ ٢}$ - ٣

(ج) $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣

(ء) $\frac{١}{س - ٢}$ - ٣

٥) منحنى الدالة ر : ر (س) = – (س+٢)^{٢} نحصل عليه من منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢}

عن طريق......................

(أ) إنعكاس في محور السينات ثم إزاحة قدرها وحدتان في اتجاه $\overleftarrow{و س/}$

(ب) إنعكاس في محور السينات ثم إزاحة قدرها وحدتان في اتجاه $\overleftarrow{و س}$

(ج) إنعكاس في محور الصادات ثم إزاحة قدرها وحدتان في اتجاه $\overleftarrow{و س/}$

(ء) إنعكاس في محور الصادات ثم إزاحة قدرها وحدتان في اتجاه $\overleftarrow{و س}$

٦) نقطة بداية الشعاعان لمنحنى الدالة د : د(س) = | س + ١ | + ٢ هي ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (-١ ، ٢)

(ج) (١ ،-٢) (ء) (-١ ، -٢)

٧) الدالة د : د(س) = | س + ١ | + ٢ تكون تزايدية في ....

أ)]١ ، ∞[ب)]-١ ، ∞[

ج)]-∞ ، ١[ء)]-∞ ، -١[

٨) مدى د : د(س) = - | س + ١ | + ٢ يساوي ....

أ)]١ ، ∞[ب)]-١ ، ∞[

ج)]-∞ ، ٢] ء)]-∞ ، -٢[

٩) مدى الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س + ٤}$ - ٣ يساوي ....

أ) ح - {٣} ب) ح - {-٣}

ج) ح - {٤} ء) ح - {-٤}

١٠) الدالة د : د(س) = $\frac{-١}{س + ٤}$ تكون تزايدية في..........

أ) ح - {-٤} ب)]٠ ، ∞[

ج)]-∞ ، ٠[ء)]-∞ ، -٤[،]-٤ ، ∞[

حلول تمارين الدرس الرابع

١) ج ٢) أ ٣) ب ٤) ج ٥) أ

٦) ب ٧) ب ٨) ج ٩) ب ١٠) ء



الصف الثاني الثانوي – القسم الادبي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الخامس: حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

ملخص الدرس: إذاكانت س ∈ ع فأن | س | = { س : س ≥ ٠ ، ـ س : س < ٠ }

- | ا | ≥ ٠
- | اب | = | ا | × | ب |
- إذا كان أ، ب عددين حقيقين: |أ| = | ب | ⟺ أ = ± ب
- إذا كان أ ∈ ع$^+$ ، | س | = أ فأن س = ± أ
- إذا كان | س | ≤ أ فأن - أ ≤ س ≤ أ
- إذا كان | س | ≥ أ فأن س ≥ أ أو س ≤ أ
- | س |^2 = | س^2 | = س^2 ، $\sqrt{س^2}$ = |س|

مثال محلول (١): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة: | س - ٢ | = ٣

الحل

س - ٢ = ٣
س = ٥

س - ٢ = - ٣
س = - ١

م.ح = { ٥، - ١ }

تدريب (١): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س - ١ | - ٢ = ٤

مثال محلول (٢): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة | ٢س - ٤ | = | س + ١ |

الحل

٢س - ٤ = س + ١
س = ٥

٢س - ٤ = - س - ١
س = ١

م.ح = { ٥، ١ }



تدريب (٢): اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطة :

مجموعة الحل في ع للمعادلة : | ٥س -١ | = | س |

(أ) ∅ (ب) { ١/٤ } (ج) { ١/٦ } (د) { ١/٦ ، ١/٤ }

مثال محلول (٣): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة: | س +٢ | + س -٢ =٠

الحـــــــــــــــــل

س ≥ -٢	س < -٢
س+٢+ س -٢ =٠	-س -٢+ س -٢ =٠
٢س =٠	-٤ =٠ مرفوض (غير ممكن)
س =٠	م.ح = { صفر }

تدريب (٣): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س +٢ | - س +١ =٠

مثال محلول (٤): أوجد مجموعة الحل للمتباينة الاتية في ع : | س -٣ | ≤ ٥

الحـــــــــــــــــل

-٥≤ س - ٣ ≤ ٥

-٢ ≤ س ≤ ٨

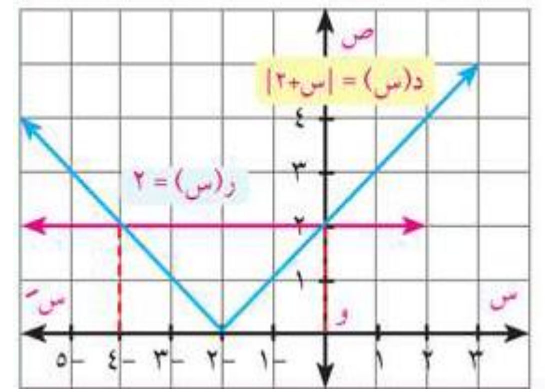
م.ح = [-٢، ٨]

تدريب (٤): أوجد مجموعة الحل للمتباينة الاتية في ع : | س -٤ | > ٢



مثال محلول (٥): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمعادلة : | س +٢ | = ٢

الحـــــــــــــــــل



بفرض أن :

د (س) = | س +٢ |

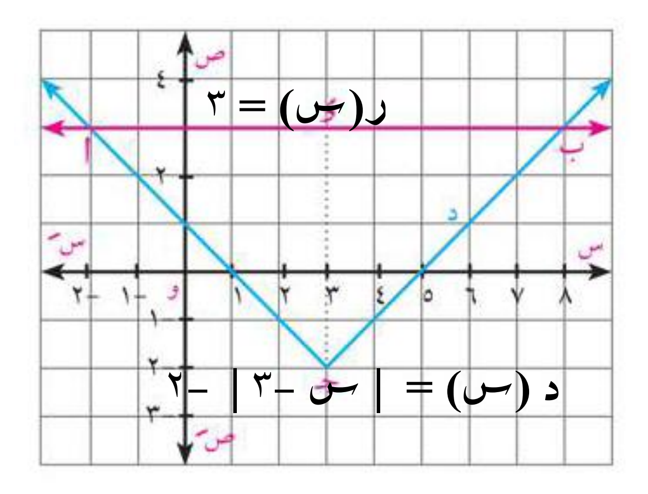
ر(س) = ٢

م.ح = { صفر، -٤ }

تدريب (٥): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمعادلة : | ٢س +٦ | =٨

مثال محلول (٦): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س -٣ | -٢< ٣

الحـــــــــــــــــل



بفرض أن :

د (س) = | س -٣ | -٢

ر(س) = ٣

م.ح =] -٢، ٨ [

تدريب (٦): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س -٥ | < ٤



مثال محلول (٧): أوجد في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س −١ | >٣

الحــــــــــــــــل

س −١ >٣ | س −١ < −٣
س >٤ | س < −٢

م . ح = ع −]−٢ ، ٤[

تدريب (٧):

أوجد في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س +١ | >٢

حلول التدريبات

حل تدريب (١): م.ح = { −٥، ٧ }

حل تدريب (٢): (ء) { $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٤}$ }

حل تدريب (٣): م.ح = ∅

حل تدريب (٤): م.ح = ع −]٢، ٦ [

حل تدريب (٥): م.ح = { −٧، ١ }

حل تدريب (٦): م.ح = [١، ٩]

حل تدريب (٧): م . ح = ع −]− ٣، ١[



تمارين على الدرس الخامس:

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

١) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س - ٣ | = س - ٣ هي..............

(أ) ∅ (ب) { ٣ } (ج) [٣ ، ∞ [(د) ع

٢) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س + ٥ | = ٧ هي ....

(أ) ∅ (ب) { - ٢ } (ج) ع (د) { - ١٢، ٢ }

٣) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س + ٣ | + ٥ = ٢

(أ) ع (ب) ∅ (ج) { - ٣ } (د) { - ٥، - ٢ }

٤) مجموعة الحل في ع للمتباينة : | س + ٣ | < ٤

(أ) ∅ (ب) [-٧، ١] (ج)] -٧، ١ [(د) ع

٥) مجموعة الحل في ع للمتباينة : | س - ٢ | ≤ - ٧

(أ)] - ٤، - ٢ [(ب) ∅ (ج) [- ٤، - ٢] (د) ع

٦) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س | + ١ = ٠ هي..............

(أ) ∅ (ب) { - ١ } (ج) [- ١ ، ∞ [(د) ع

٧) مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س | = س هي ....

(أ) ∅ (ب) [٠ ، ∞ [(ج) ع (د)] ٠ ، ∞ [

٨) **مجموعة الحل في ع للمعادلة** : | س | = ـ س هي ....

(أ) ع (ب) [ـ ∞ ، ٠] (ج) ∅ (د)] ـ ∞ ، ٠ [

٩) **إذا كان س** > ١ فإن $\frac{س^٢ - ١}{\sqrt{س٢ - ٢ س + ١}}$ =.............

(أ) س + ١ (ب) س ـ ١ (ج) ـ س + ١ (د) ـ س ـ ١

١٠) | π ـ ٣ | ـ | ٣ ـ π | =.......

(أ) ـ ٦ (ب) ٢ π (ج) صفر (د) ـ ٢ π

حلول تمارين على الدرس الخامس:

١) ج	٢) د	٣) ب	٤) ج	٥) د
٦) أ	٧) ب	٨) ب	٩) د	١٠) ج



تمارين علي الوحدة الأولى
الصف الثاني الثانوي - القسم الادبي (رياضيات عامة)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة من الاجابات المعطاة :

١) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ هو..................

Ⓜ ح – { ـ١ } Ⓑ ح – { ١ } Ⓒ ح – { ـ١ ، ١ } Ⓓ ح – { ٠ }

(أ) ح – { ـ١ } (ب) ح – { ١ } (جـ) ح – { ـ١ ، ١ } (ء) ح – { ٠ }

٢) نقطة تماثل المنحنى للدالة د حيث د(س) = $(\text{س} + ٢)^{٣}$ ـ ١ هي..................

(أ) (٢ ، ١) (ب) (ـ٢ ، ١) (جـ) (ـ٢ ، ـ١) (ء) (٢ ، ـ١)

٣) الدالة الزوجية فيما يلي هي ....

(أ) د(س) = $\text{س}^{٢}$ (ب) د(س) = $\text{س}^{٣}$ (جـ) د(س) = س (ء) د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$

٤) مجموعة حل المعادلة | س | - ١ = ٠ هي...............

(أ) { ١ } (ب) ∅ (جـ) { ـ١ } (ء) { ـ١ ، ١ }

٥) مجموعة حل المتباينة | س ــ ٥ | < ٣ هي...............

(أ)] ٢ ، ٨ [(ب) [٢ ، ٨] (جـ) ح -] ٢ ، ٨ [(ء) ح - [٢ ، ٨]

٦) مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{-\text{س}}$ هو..................

(أ) ح – { ٠ } (ب) ح (جـ)] ٠ ، ∞ [(ء)] -∞ ، ٠]

٧) إذا كانت د ، هـ دالتان حيث د(س) = ٢ س + ١ ، هـ (س) = $\sqrt{\text{س}+٢١}$

فإن (د + هـ)(٤)=...

(أ) ١٤ (ب) ٩ (جـ) $\sqrt{٣٠}$ (د) ٥

٨) جميع الدوال التالية زوجية عدا ....

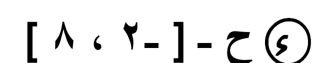
(أ) د(س) = س^{٢} (ب) د(س) = ٧ (جـ) د(س) = جتا س (د) د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$

٩) مجموعة حل المعادلة | س | + س = ٠ هي...............

(أ) ح (ب) Ø (جـ)]- ∞ ، ٠] (د)]- ∞ ، ٠]

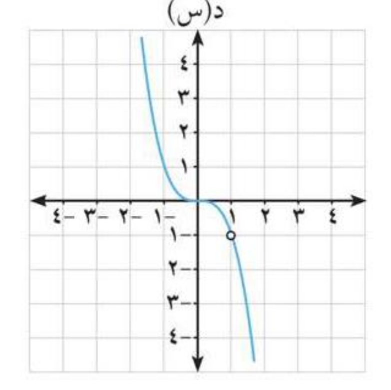
١٠) مجموعة حل المتباينة | س ــ ٣ | > ٥ هي...............

(أ)] -٢ ، ٨ [(ب) [-٢ ، ٨] (جـ) ح -] -٢ ، ٨ [



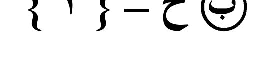
(د) ح - [-٢ ، ٨]

١١) إذا كان الشكل المقابل يمثل الرسم البياني للدالة د



فإن مدى الدالة د = ...

(أ) ح – { - ١ }



(ب) ح – { ١ }

(جـ) ح – { ١ ، -١ } (د) { ١ ، -١ }

١٢) إذا كان د(س) = { س^{٢} + ٣ عندما -٣ ≤ س < ٢ ؛ ٥س – ٤ عندما س ≥ ٢

فإن د (٣) + د (-١) =...............

(أ) ١١ (ب) ١٥ (جـ) ٤ (د) ٤٤

١٣) إذا كانت د (س) = ٢ س^{٢} + ب ، وكان د(٣) = ٧ فإن د(- ٣) =.....

(أ) صفر (ب) ٧ (ج) - ٧ (د) ١٤

١٤) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ - ١ هي ....

(أ) (١ ، ١) (ب) (١ ، -١) (ج) (-١ ، ١) (د) (-١ ، -١)

١٥) مجموعة حل المعادلة | ٣ ـ ٢ س | = ٥ هي...............

(أ) { -١ ، ٤ } (ب) { ٥ ، -٥ } (ج) { ٤ ، ٠ } (د) { -١ ، ٣ }

١٦) مجموعة حل المتباينة | س | ≤ ٢ هي ....

(أ)] -٢ ، ٢ [(ب) [-٢ ، ٢] (ج) ح -] -٢ ، ٢ [(د) ح -] -٢ ، ٢ [

١٧) الدالة الفردية فيما يلي هي د : د(س)= ....

(أ) ٧ (ب) | س | (ج) ١+ جا س (د) س

١٨) منحنى الدالة د : د(س) = - (٣ - س)^{٢} نحصل عليه عن طريق ......

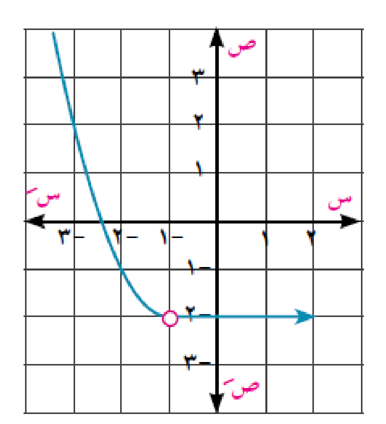
(أ) انعكاس لمنحنى الدالة هـ (س) = س^{٢} في محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات لأسفل

(ب) انعكاس لمنحنى الدالة هـ (س) = س^{٢} في محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات لأعلى

(ج) انعكاس لمنحنى الدالة هـ (س) = س^{٢} في محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات يسارا

(د) انعكاس لمنحنى الدالة هـ (س) = س^{٢} في محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات يمينا

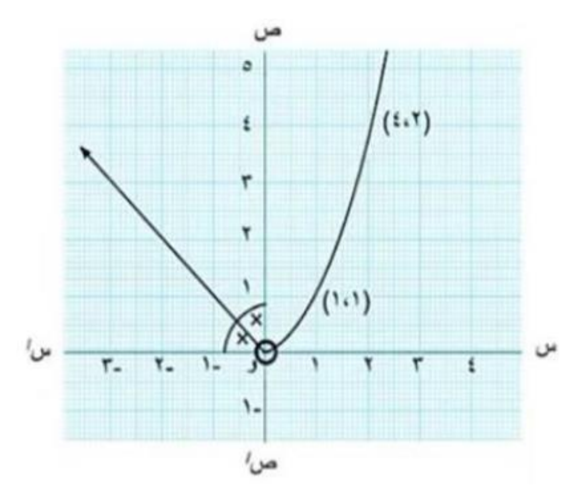
١٩) إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د



فإن د (١) + د (-١) = ...

ⓐ غير معرف
ⓑ صفر
ⓒ -١
ⓓ -٢

٢٠) الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د :



ⓐ د(س) = $س^٢$

ⓑ د(س) = |س|

ⓒ د(س) = { $س^٣$: س > ٠ ، - س : س < ٠ }

ⓓ د(س) = { $س^٢$: س > ٠ ، - س : س < ٠ }



ثانيا : الاسئلة المقال :

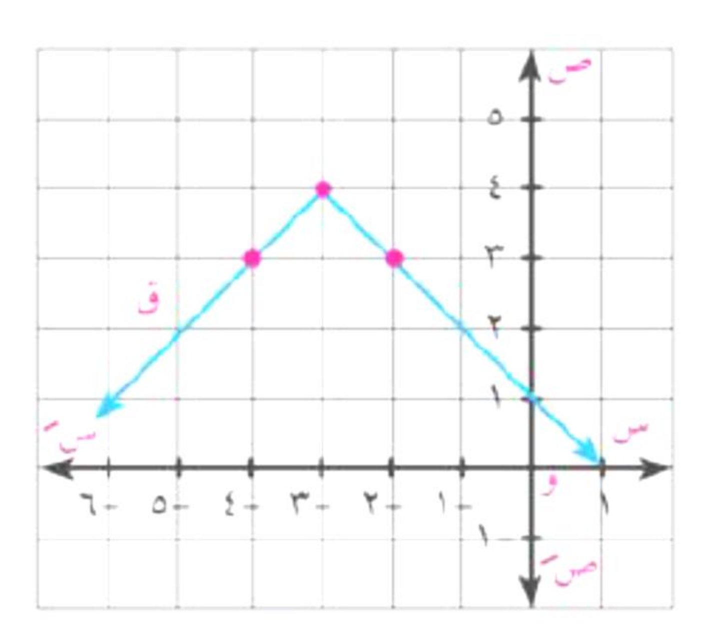
١) إذا كان مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س^{٢} + ٢س + ك}$

هو ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) فعين جميع قيم ك الممكنة

٢) اكتب قاعدة الدالة الممثلة

في الشكل المقابل و عين مجالها – مداها

ثم ابحث اطرادها



٣) أوجد مجموعة حل المتباينة

| ٢ س – ٣ | < ٥

٤) عين مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{س + ١}$ - $\frac{١}{س}$



حل تمارين على الوحدة الأولى (القسم الادبى)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

١) ب	٢) ج	٣) ﺃ	٤) ء	٥) ﺃ
٦) ء	٧) ﺃ	٨) ء	٩) ء	١٠) ء
١١) ﺃ	١٢) ب	١٣) ب	١٤) ب	١٥) ﺃ
١٦) ء	١٧) ء	١٨) ء	١٩) ﺃ	٢٠) ء

ثانيا : اجابةالاسئلة المقال :

١) ك ∋] ١ ، ∞ [

٢) د(س) = - | س + ٣ | + ٤

المجال = ح ، المدي =] - ∞ ، ٤]

الدالة تزايدية في] - ∞ ، -٣ [، الدالة تناقصية في] -٣، ∞ [

٣) ح —] - ١ ، ٤[

٤) مجا ل د =] - ١ ، ∞ [- { ٠ }

الصف الثاني – القسم الادبي – الاختبار الاول على الوحدة الاولى

اولا: الاسئلة الموضوعية :

في البنود من (١ : ١٠) لكل بند أربع خيارات احداها فقط صحيحة ظلل دائرة الاختيار الصحيح

١) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{س}{س + ١}$ هو..................

ⓐ ح – { – ١ } ⓑ ح – { ١ }

ⓙ ح – { –١ ، ١ } ⓓ ح – { ٠ }

٢) نقطة تماثل المنحنى للدالة د حيث د(س) = (س -٣)^{٣} + ٢ هي..................

ⓐ (٢ ، ٣) ⓑ (–٢ ، ٣)

ⓙ (٣، ٢) ⓓ (٢ ، – ٣)

٣) الدالة الفردية فيما يلي هي ....

ⓐ د(س) = س^{٢} ⓑ د(س) = س^{٣}

ⓙ د(س) = س+٢ ⓓ د(س) = $\frac{١}{س}$ + ٤

٤) مجموعة حل المعادلة | س | + ١ = ٠ هي..............

ⓐ { ١ } ⓑ ∅

ⓙ { – ١ } ⓓ { – ١ ، ١ }



٥) **مجموعة حل المتباينة | س – ٥ | ≥ ٣ هي...............**

(أ) [٢ ، ٨]   (ب)] ٢ ، ٨ [

(ج) ح - [٢ ، ٨]   (د) ح -] ٢ ، ٨ [

٦) **مجال الدالة د : د(س) = √س هو.................**

(أ) ح – { ٠ }   (ب) ح

(ج) [٠ ، ∞ [(د)] -∞ ، ٠]

٧) **إذا كانت د ، هـ دالتان حيث د(س) = ٢ س + ١ ، هـ(س) = √(س+١٢)**
فإن (د + هـ)(٤)=...

(أ) ١٣   (ب) ٩

(ج) √٣٠   (د) ٥

٨) **الدالة الفردية فيما يلي هي ....**

(أ) د(س) = س^٢   (ب) د(س) = ٧

(ج) د(س) = جتا س   (د) د(س) = ١ / س

٩) مجموعة حل المعادلة | س | + س = ٠ هي..............

(أ) ح (ب) ∅

(جـ) [- ∞ ، ٠] (د) [- ∞ ، ٠ [

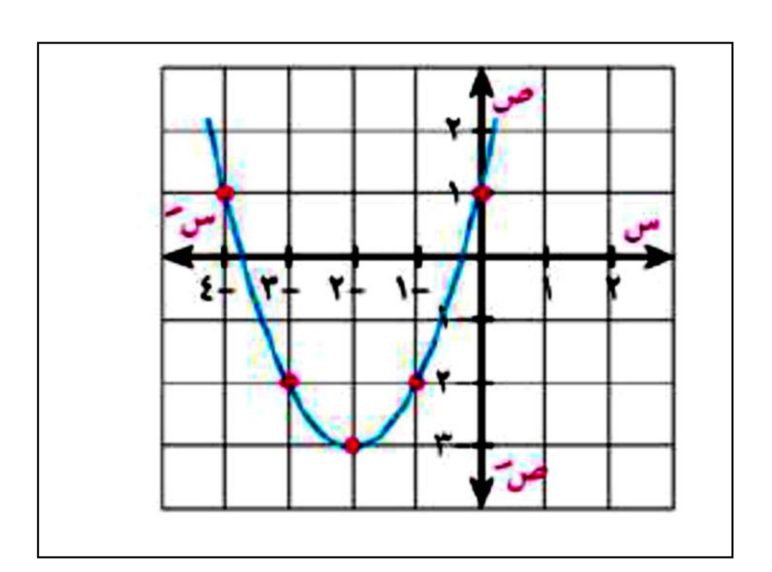
١٠) مجموعة حل المتباينة | س ــ ٣ | ≤ ٥ هي..............

(أ)] -٢ ، ٨ [(ب) [-٢ ، ٨]

(جـ) ح -] -٢ ، ٨ [(د) ح - [-٢ ، ٨]

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني لدالة تربيعة د فأكتب قاعدة الدالة وعين مجالها ومداها ثم ابحث اطرادها.



٢) عين مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{س + ١}$ - $\frac{١}{س - ٢}$

حل الاختبار الاول على الوحدة الأولى(القسم الأدبى)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

١) أ ٢) جـ ٣) ب ٤) ب ٥) ب

٦) جـ ٧) أ ٨) ء ٩) ء ١٠) جـ

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) **د(س) = (س + ٢)^{٢} – ٣**

المجال = ح ، المدي = [- ٣ ، ∞ [

الدالة تناقصية في] - ∞ ، -٢ [، الدالة تزايدية في] -٢، ∞ [

٢) **مجا ل د =] - ١ ، ∞ [- { ٢ }**



الصف الثاني – القسم الادبي – الاختبار الثانى على الوحدة الاولى

اولا: الاسئلة الموضوعية :

في البنود من (١ : ١٠) لكل بند أربع خيارات احداها فقط صحيحة ظلل دائرة الاختيار الصحيح

١) مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{س - ١}$ هو.................

Ⓐ ح – { –١ }   Ⓑ ح – { ١ }   Ⓒ ح   Ⓓ [١ ، ∞[

٢) نوع الدالة د : د (س) = س جاس +٥

Ⓐ زوجية   Ⓑ فردية   Ⓒ ليست زوجية وليست فردية   Ⓓ زوجية وفردية

٣) مجموعة حل المعادلة : | س -٥ | = ١ في ح هي ....

Ⓐ { ١ }   Ⓑ { ٥ }   Ⓒ { ١ ، ٥ }   Ⓓ { ٤ ، ٦ }

٤) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $(س - ١)^{٣}$ + ٣ هي ....

Ⓐ (١ ، ٣)   Ⓑ (–١ ، ٣)   Ⓒ (٣، ١)   Ⓓ (٣ ، –١)

٥) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^{٢} - ٦ س + ٩}$ ≥ ٧ في ح هي ....

Ⓐ] -٤ ، ١٠ [Ⓑ [-٤ ، ١٠]   Ⓒ ح -] -٤ ، ١٠ [Ⓓ ح - [-٤ ، ١٠]

٦) مدى الدالة د : د(س) = { ٢ : س > ٠ ، –٣ : س < ٠ }

Ⓐ { -٣، ٢ }   Ⓑ { -٢، ٣ }   Ⓒ ح – { ٠ }   Ⓓ ح – { -٣، ٢ }

٧) معادلة محور تماثل منحنى الدالة د : د (س) = (س +٢)^{٢} هي ....

(أ) س = ٢　　(ب) س = -٢　　(جـ) ص = ٢　　(ء) ص = -٢

٨) إذا كانت د دالة زوجية وكان - أ ، أ ∈ مجال د فإن د (أ) + د(- أ) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢ د (أ)　　(جـ) - ٢ د (أ)　　(ء) ٢

٩) إذا كان مجال الدالة د : د(س) = $\frac{٥}{س^{٢} + ٦س + ك}$ هو ح – { - ٣ } فإن :

ك = ...

(أ) ٥　　(ب) ٦　　(جـ) ٩　　(ء) -٩

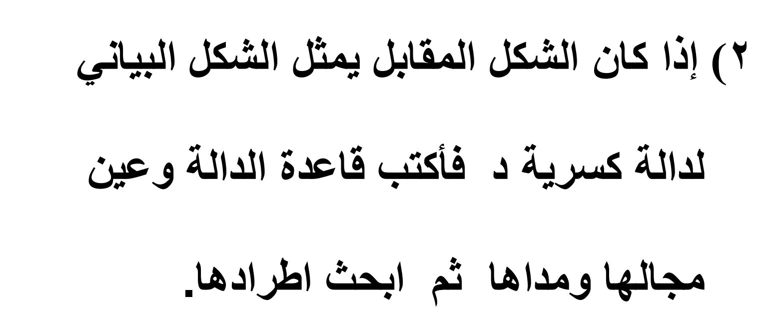
١٠) مدى الدالة د : د(س) = | س | + ٢ هو ....

(أ)] - ∞ ، - ٢]　　(ب) [٠ ، ∞ [　　(جـ) [٢ ، ∞ [　　(ء) [- ٢ ، ∞ [

ثانيا : الاسئلة المقال :

١)أوجد جبريا مجموعة الحل في ح للمعادلة :

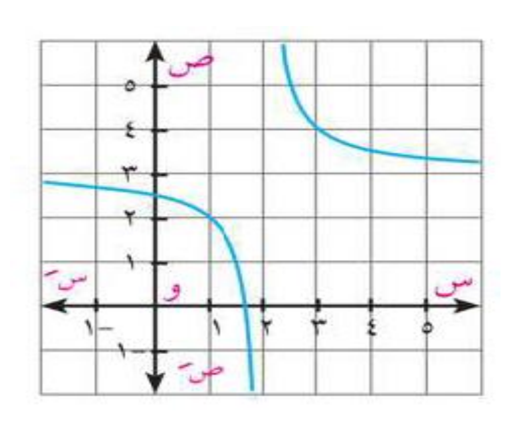
$$|س - ٢|^{٢} + ٢ |س - ٢| - ٣ = ٠$$



٢) إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني

لدالة كسرية د فأكتب قاعدة الدالة وعين

مجالها ومداها ثم ابحث اطرادها.



حل الاختبار الثانى على الوحدة الأولى(القسم الأدبى)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

١) ء ٢) أ ٣) ء ٤) أ ٥) ب

٦) أ ٧) ب ٨) ب ٩) جـ ١٠) جـ

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) $|س - ٢|^{٢} + ٢ |س - ٢| - ٣ = ٠$

$(|س - ٢| + ٣) \; (|س - ٢| - ١) = ٠$

$|س - ٢| + ٣ = ٠$	$|س - ٢| - ١ = ٠$
$|س - ٢| = -٣$	$|س - ٢| = ١$
مرفوض	س - ٢ = ١ أو س - ٢ = - ١
	س = ٣ أو س = ١

مجموعة الحل = { ١ ، ٣}

٢) قاعدة الدالة هي : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣

مجال الدالة = ح – { ٢ }

مدى الدالة = ح – { ٣ }

د تناقصية على] - ∞ ، ٢ [،] ٢ ، ∞ [



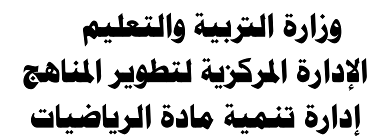
رياضيات - جبر

الصف الثانى الثانوى (أدبى)

الوحدة الثانية

(الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها)

المحتويات





الصف الثاني الثانوي – القسم الأدبى
الوحدة الثانية – الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

الدرس الأول: الأسس الكسرية

المفاهيم الاساسية للدرس:

تعريف لكل $أ \in ح$ ولكل $ن \in ص^{+}$ فإن :

١) $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times .... \times أ$ (حيث العامل أ مكرر ن من المرات)

٢) $أ^{صفر} = ١$ حيث $أ \neq$ صفر

٣) $أ^{-١} = \frac{١}{أ}$ حيث $أ \neq$ صفر

٤) $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ حيث $أ \neq$ صفر

خواص الأسس الصحيحة : لكل $أ \in ح - \{٠\}$ ، $ب \in ح - \{٠\}$ ، $م \in ص$ ، $ن \in ص$

١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

٢) $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

٣) $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$

٤) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

٥) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

أمثلة محلولة

مثال (١): أختصر لابسط صورة

$$\frac{٢٥^{٤ك-١} \times ٩^{٢ك-٢}}{٥^{٧ك-١} \times ٤٠٥^{ك-١}}$$

الحل : نقوم بتحليل الاساسات الى عواملها الاولية مثل $٢٥ = ٥^{٢}$ ، $٩ = ٣^{٢}$ ، $٤٠٥ = ٣^{٤} \times ٥$

المقدار $= \frac{(٥^{٢})^{٤ك-١} \times (٣^{٢})^{٢ك-٢}}{٥^{٧ك-١} \times (٣^{٤} \times ٥)^{ك-١}} = \frac{٥^{٨ك-٢} \times ٣^{٤ك-٤}}{٥^{٧ك-١} \times ٣^{٤ك-٤} \times ٥^{ك-١}}$



$= \text{٥}^{\text{٨ك - ٢ - ٧ك + ١ - ك + ١}} \times \text{٣}^{\text{٤ك - ٤ - ٤ك + ٤}} = \text{٥}^{\text{صفر}} \times \text{٣}^{\text{صفر}} = \text{١} \times \text{١} = \text{١}$

تدريب (١)

أوجد في ابسط صورة

$$\frac{\text{٩}^{\text{٤م+١}} \times \text{٤}^{\text{٢ - ٢م}}}{\text{٣}^{\text{٩م + ١}} \times \text{٤٨}^{\text{١ - م}}}$$

ملحوظة هامه :-

المعادلة $\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ لها ن من الجذور

١) إذا كان ن عددا زوجيا ، أ > صفر فإن للمعادلة جذران حقيقيان هما $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ ، $-\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ وباقي الجذور أعداد مركبة .

٢) إذا كان ن عددا زوجيا ، أ < صفر فإن المعادلة ليس لها جذور حقيقية (الجذور اعداد مركبة)

٣) إذا كان ن عددا فرديا ، $\text{أ} \in \text{ح} - \{\text{٠}\}$ فإن المعادلة لها جذر حقيقي وحيد (باقى الجذور اعداد مركبة)

٤) إذا كان $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$ ، أ = صفر فإن المعادلة لها حل حقيقى وحيد وهو س = ٠ (الجذور مكررة وكل منها يساوى صفر عند ن > ١)

مثال (٢): أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يلي:

١) $\text{س}^{\text{٤}} = \text{١٦}$	٢) $\text{س}^{\text{٥}} = \text{٢٤٣}$	٣) $\text{س}^{\text{٤}} = -\text{٨}$
الحل :	**الحل :**	**الحل :**
$\text{س}^{\text{٤}} = \text{١٦}$	$\text{س}^{\text{٥}} = \text{٢٤٣}$	$\text{س}^{\text{٤}} = -\text{٨}$
$\text{س}^{\text{٤}} = (\pm\text{٢})^{\text{٤}}$	$\text{س}^{\text{٥}} = \text{٣}^{\text{٥}}$	
مجموعة الحل = {-٢ ، ٢}	**مجموعة الحل** = {٣}	**مجموعة الحل** = $\varnothing$

تدريب (٢)

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يلي:

١) $\text{س}^{\text{٤}} = \text{٨١}$ ٢) $\text{س}^{\text{٣}} = \text{٢٧}$ ٣) $\text{س}^{\text{٢}} = -\text{١٦}$



الاسس الكسرية :

تعريف

١) لأى عدد حقيقى أ ⩾ ٠ ، ن ∈ ص$^+$ - {١} يكون أ$^{\frac{1}{ن}}$ = $\sqrt[ن]{أ}$

هذه العلاقة صحيحة ايضا عندما أ < ٠ ، ن عدد صحيح فردى اكبر من ١

٢) أ$^{\frac{م}{ن}}$ = $(\sqrt[ن]{أ})^م$ = $\sqrt[ن]{أ^م}$ **حيث** أ ∈ ح ، م ، ن **عددان صحيحيان ليس بينهما عامل مشترك** ، ن > ١ ، $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ح

تعميم قوانين الأسس :- قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

خواص الجذور النونية : إذا كان أ ، **ب** عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب}$ ∈ ح فإن:

١) $\sqrt[ن]{أ ب}$ = $\sqrt[ن]{أ}$ × $\sqrt[ن]{ب}$

٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}}$ = $\frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ **: ب** ≠ ٠

مثال (٣): أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الاتية

١)^٥ $\sqrt{س^٢}$ = ١٦

الحل :

س$^{\frac{٢}{٥}}$ = ١٦

س = ± $(١٦)^{\frac{٥}{٢}}$ ∴ س = ± ١٠٢٤ **مجموعة الحل** = { ـ ١٠٢٤ ، ١٠٢٤ }

٢) س$^{\frac{٤}{٣}}$ ـ ١٣ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٣٦ = ٠

(س$^{\frac{٢}{٣}}$ ـ ٩) (س$^{\frac{٢}{٣}}$ ـ ٤) = ٠



س $^{\frac{٢}{٣}}$ = ٩ أو س $^{\frac{٢}{٣}}$ = ٤

س = ± ٩ $^{\frac{٣}{٢}}$ أو س =± ٤ $^{\frac{٣}{٢}}$

س = ± ٢٧ أو س = ± ٨

مجموعة الحل = { ٢٧ ، ـ ٢٧ ، ٨ ، ـ٨ }

تدريب (٣)

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الاتية

١) س $^{\frac{٤}{٣}}$ = ٨١

٢) س $^{\frac{٤}{٥}}$ ـ ٣ س $^{\frac{٢}{٥}}$ ـ ٤ = ٠

اجابة التدريبات

تدريب ١) ١

تدريب ٢)

١) {٣ ، ـ٣ }　　　٢) {٣}　　　٣) ∅

تدريب ٣)

١) {٢٧ ، ـ٢٧ }　　　٢) {ـ٣٢،٣٢}



تمارين على الدرس الاول

أختر الاجابة الصحيحية من بين الاجابات المعطاة :

١) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{٢} = -٢٥$ هى ....

ⓐ صفر ⓑ ٤ ⓒ ٣ ⓓ ٢

٢) إذا كان $٥^{س} = ٣$ فإن $٢٥^{س} =$ ....

ⓐ ٦ ⓑ ٩ ⓒ ١٥ ⓓ ٢٥

٣) إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن س = ...

ⓐ ٥١٢ ⓑ ١٦ ⓒ ٤ ⓓ ٢

٤) إذا كان $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن س = ...

ⓐ ٤ ⓑ ± ٢ ⓒ ٢ ⓓ -٢

٥) إذا كان $٣^{س+١} = ٥^{س+١}$ فإن $(٨)^{٢س+٢} =$ .....

ⓐ ١ ⓑ -١ ⓒ ٣ ⓓ ٥

٦) مجموعة حل المعادلة $٢^{س-١} + ٢^{س} = ٢٤$ فى ح هى ....

ⓐ ٢ ⓑ -٢ ⓒ ٣ ⓓ ٤

٧) مجموعة حل المعادلة $٣^{٢س} - ١٠(٣^{س}) + ٩ = ٠$ فى ح هى ....

ⓐ {٢} ⓑ {٠} ⓒ {٠ ، ٢} ⓓ {١ ، ٩}

٨) مجموع جذور المعادلة $س^{٤} = ١٦$ يساوى

ⓐ ٢ ⓑ ± ٢ ⓒ -٢ ⓓ صفر

اجابات تمارين على الدرس الأول

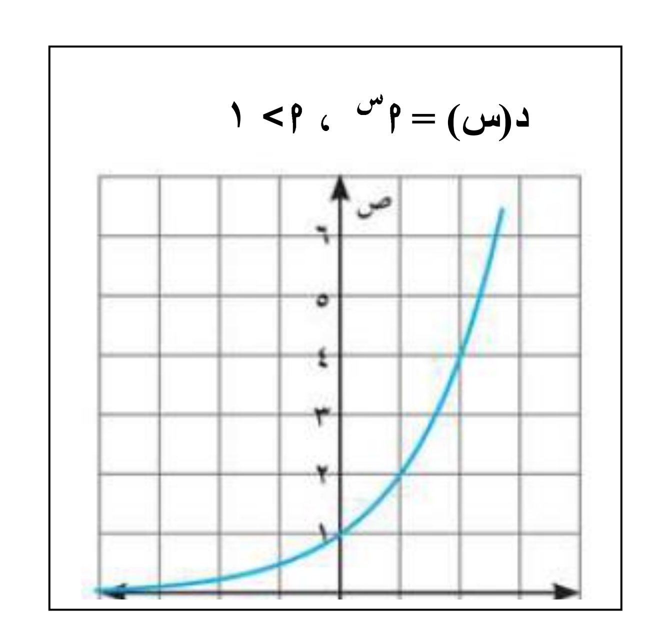
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ⓐ	ⓑ	ⓑ	ⓒ	ⓐ	ⓓ	ⓒ	ⓓ

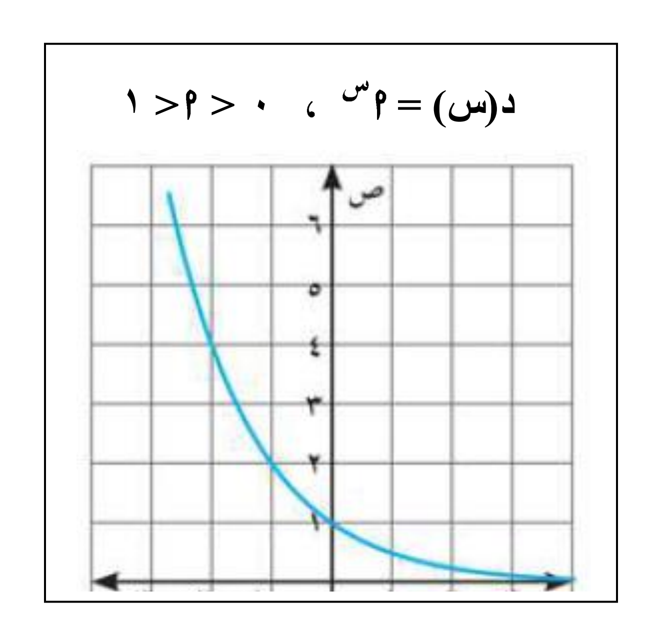


الدرس الثاني : الدالة الاسية وتطبيقاتها

المفاهيم الاساسية:

- الدالة د حيث د(س) = $م^{س}$ ، م > ٠ ، م ≠ ١ تسمى دالة أسية





ونلاحظ ان

- مجال الدالة الاسية د : د(س) = $م^{س}$ ، هو ع ومداها $ع^{+}$
- تكون الدالة تزايدية عندما م > ١ (شكل ١) ، تكون الدالة تناقصية عندما ٠ < م < ١ (شكل ٢)
- منحنى الدالة الاسية د : د(س) = $م^{س}$ يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- الدالة الاسية ليست فردية وليست زوجية
- منحنى الدالة د : د(س) = $م^{س}$ ، و منحنى الدالة د : د(س) = $م^{-س}$ كل منهما صورة للأخر بالإنعكاس في محور الصادات
- $\lim_{س \to \infty} م^{س} = \infty$ عندما م > ١ ، $\lim_{س \to \infty} م^{س} = ٠$ عندما ٠ < م < ١
- يمكن تطبيق التحويلات الهندسية التي تمت دراستها في الوحدة الاولى على الدالة الاسية

الامثلة

مثال ١ : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

أيا مما يلي يمثل دالة اسية

(أ) د(س) = $(-٢)^{س}$ (ب) د(س) = $(١)^{س}$ (ج) د(س) = $(\sqrt{٢})^{س}$ (د) د(س) = $س^{٢}$

الحل

الاجابة (ج) لأنها الدالة الوحيدة التي تحقق شروط الدالة الاسية من بين الدوال المعطاه

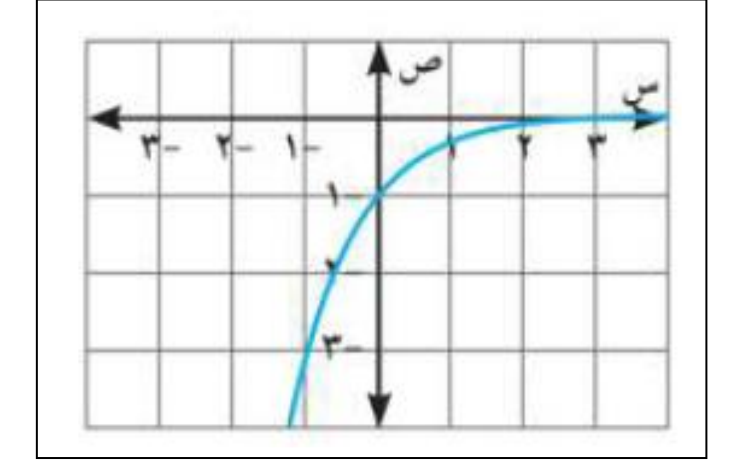
تذكر أن : شرط أن تكون الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ دالة أسية هو أ > ٠ ، أ ≠ ١

تدريب ١ : اختر الاجابة الصحيحة

أيا مما يلي يمثل دالة اسية

(أ) د(س) = $(-١)^{س}$ (ب) د(س) = $(\frac{١}{٩})^{س}$ (ج) د(س) = $(١)^{س}$ (د) د(س) = $س^{٣}$

مثال ٢ :



المنحنى المرسوم في الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ق ، والذي حصلنا عليه من منحنى الدالة د : د(س) = $٣^{س}$ بعد إجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة د

- أكتب قاعدة الدالة ق
- صف التحويلات الهندسية التي تمت على منحنى الدالة د للحصول على منحنى الدالة ق
- ابحث اطراد الدالة ق
- أوجد ق(٠) ،ق(٢) ، ق(-٢)

الحل

- قاعدة الدالة ق هي ق(س) = $-(٣)^{-\text{س}}$
- حصلنا على منحنى الدالة ق من منحنى الدالة د بالانعكاس في محور السينات ثم الانعكاس في محور الصادات
- الدالة تزايدية على مجالها
- ق(٠) = -١ ، ق(٢) = $-(٣)^{-٢} = -\frac{١}{٩}$ ، ق(−٢) = $-(٣)^{٢} = -٩$

تدريب ٢:

المنحنى المرسوم في الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ق ، والذي حصلنا عليه من منحنى الدالة د : د(س) = $٢^{\text{س}}$

بعد إجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة د



- أكتب قاعدة الدالة ق
- صف التحويلات الهندسية التي تمت على منحنى الدالة د للحصول على منحنى الدالة ق
- ابحث اطراد الدالة ق
- أوجد ق(٠) ،ق(٢) ، ق(−٢)

حلول التدريبات

تدريب (١)

ⓑ د(س) = $\left(\frac{١}{٩}\right)^{\text{س}}$

تدريب (٢)

- قاعدة الدالة ق هي ق(س) = $٢^{\text{س}} - ١$
- حصلنا على منحنى الدالة ق من منحنى الدالة د بإزاحة قدرها وحدة واحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}'}$
- الدالة تزايدية على مجالها
- ق(٠) = ٠ ، ق(٢) = ٣ ، ق(−٢) = $-\frac{٣}{٤}$



تمارين على الدرس الثاني

السؤال الاول : اختر الاجابة الصحيحة

١) إذا كانت الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ تمثل دالة أسية فإن أ يمكن أن تساوي.......

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -١ (د) $\frac{٥}{٤}$

٢) إذا كانت الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ تمثل دالة تناقصية فإن أ يمكن أن تساوي.......

(أ) $\frac{٨}{٩}$ (ب) ١ (ج) -١ (د) $\frac{٥}{٤}$

٣) إذا كانت الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ تمثل دالة تزايدية فإن أ يمكن أن تساوي.......

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -١ (د) ١,١

٤) إذا كان د(س) = $٢^{س}$ + ١ فإن : د(-٢) = ...

(أ) -٣ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

٥) إذا كان د(س) = $٣^{س + ١}$ فإن د(س) = $\frac{١}{٩}$ عندما س = ...

(أ) صفر (ب) -١ (ج) -٢ (د) -٣

٦) منحنى الدالة د(س) = $٢^{-س}$ هو صورة لمنحنى الدالة د(س) = $٢^{س}$ بالانعكاس في ....

(أ) محور السينات (ب) محور الصادات (ج) نقطة الاصل (د) المستقيم ص = س

٧) مدي الدالة د : د(س) = ٢ + $٣^{س}$ هو ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (ج)] ٥ ، ∞ [(د)] ٢ ، ∞ [

اجابة تمارين الدرس الثاني

١) د ٢) أ ٣) د ٤) ب ٥) د

٦) ب ٧) د

الدرس الثالث: المعادلات الأسية

المفاهيم الاساسية للدرس:

إذا تضمنت المعادلة متغيرا فى الأس فإنها تسمى معادلة أسية مثل ($أ^{س}$ = ل)

أولا : إذاكان $أ^{م} = أ^{ن}$ حيث أ ∌ { ٠ ، ١ ، -١ } فإن م = ن

أمثلة محلول

مثال (١): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٥^{س+٢} = ٦٢٥$

الحل : $٥^{س+٢} = ٦٢٥$

$٥^{س+٢} = ٥^{٤}$

س + ٢ = ٤

س = ٢ مجموعة الحل = {٢}

تدريب (١) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٣^{س-٢} = ٨١$

مثال (٢): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $(\sqrt{٣})^{س-١} = ٢٧$

الحل : $(\sqrt{٣})^{س-١} = ٢٧$

$(\sqrt{٣})^{س-١} = ٣^{٣}$

$(\sqrt{٣})^{س-١} = (\sqrt{٣})^{٦}$

س - ١ = ٦

س = ٧ مجموعة الحل = {٧}

تدريب (٢): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $(\sqrt{٢})^{س^{٢}-١} = ٤\sqrt{٢}$

مثال (٣): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٢^{س-١} = \frac{١}{١٦}$

الحل : $٢^{س - ١} = ٢^{- ٤}$ ∴ س - ١ = -٤ ∴ مجموعة الحل = {-٣}

تدريب (٣): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٣^{س+ ١} = \frac{١}{٩}$

ثانيا : إذاكان $أ^{م} = ب^{م}$ حيث أ ∌ { ٠ ، ١ ، -١ } فإن

إما م = صفر

أو أ = ب عندما م عدد فردى ، أ = ± ب عندما م عدد زوجى

مثال (٤): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$

الحل : $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$

س +٣ = ٠

س = -٣

مجموعة الحل = {-٣}

تدريب (٤) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٧^{س-٣} = ٩^{س-٣}$

مثال (٥): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٧^{س -٤} = س^{س -٤}$

الحل : $٧^{س -٤} = س^{س -٤}$

س = ٧ أو س-٤ = . ∴ س = ٤

مجموعة الحل = { ٤، ٧}

تدريب (٥): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $س^{س -٥} = ٦^{س -٥}$



مثال (٦): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $س^{٦} = ٦٤$

الحل : $س^{٦} = (\pm ٢)^{٦}$

$س = \pm ٢$

مجموعة الحل = { ٢ ، -٢ }

تدريب (٦): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $(س+١)^{٣} = ٢٧$

مثال (٧): إذا كان د(س) = $٣^{س}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س-١) + د(س+٢) = ٧٥٦

الحل : $٣^{س-١} + ٣^{س+٢} = ٧٥٦$

$٣^{س} \times ٣^{-١} + ٣^{س} \times ٣^{٢} = ٣^{س}(٣^{-١} + ٣^{٢}) = ٣^{س}(\frac{٢٨}{٣}) = ٧٥٦$

$٣^{س} = ٧٥٦ \times \frac{٣}{٢٨} = ٨١$

$٣^{س} = ٣^{٤}$ $\quad$ س = ٤

تدريب (٧): إذا كان د(س) = $٣^{س}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س+١) - د(س-١) = ٧٢

مثال (٨): إذا كان د(س) = $٢^{س}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س) + د(٥-س) = ١٢

الحل : $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$

$٢^{س} + ٢^{٥} \times ٢^{-س} = ١٢$ $\quad$ (بالضرب × $٢^{س}$)

$٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$



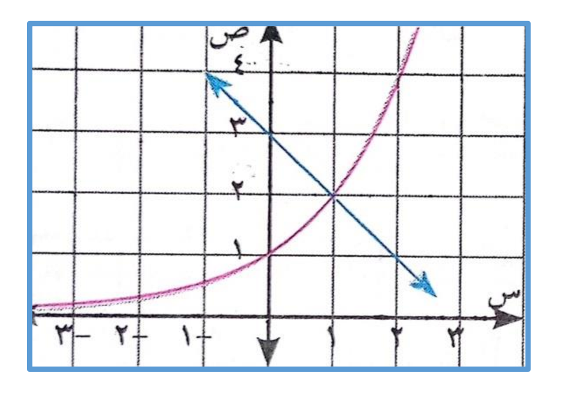
$٢^{س} = ٤$ أ، $٢^{س} = ٨$

س = ٢ أ، س = ٣

تدريب (٨): إذا كان د(س) = $٣^{س}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س+١) + د(٣ - س) = ٣٠.

حل المعادلات الأسية بيانيا

مثال (٩): إذا كان د١(س) = $٢^{س}$ ، د٢(س) = ٣ - س فأوجد قيمه س التى تحقق د١(س) = د٢(س)



الحل :

من رسم الشكل البيانى للدالتين نجد ان نقطه التقاطع

عند س = ١

تدريب (٩): إذا كان د١(س) = $٢^{س}$ ، د٢(س) = ٤ فأوجد بيانيا قيمه س التى تحقق د١(س) = د٢(س)

حلول التدريبات:

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
س=٢	س=٠، أ، ٢	س=٣	{٢}	{٥،٦ }	{٣}	{-٣}	{٣}	{٦}

تمارين على الدرس الثالث

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١) إذا كان د(س) = ٢ ^س^ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) = ٣٢ فى ح هى ....

Ⓐ { ٤ }   ⓑ { ٣ }   ⓙ { ٥ }   ⓓ { ١٦ }

٢) إذا كان د(س) = ٣ ^س^ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) + د(س – ١)= ١٠ فى ح هى ....

Ⓐ { ٣ }   ⓑ { ٢ }   ⓙ { ١ }   ⓓ { ٠ }

٣) إذا كان ٤ ^س+٢^ = ٣ ^س+٢^ فإن س = ...

Ⓐ ٢   ⓑ -٣   ⓙ -٢   ⓓ ٣

٤) إذا كان $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} = \frac{٢٤٣}{٣٢}$ فإن س = ...

Ⓐ ٥   ⓑ - ٥   ⓙ ٤   ⓓ -٤

٥) مجموعة حل المعادلة ٣ ^|س+٤|^ = ٨١ فى ح هى ....

Ⓐ { ٠ }   ⓑ { -٨ }   ⓙ {-٨ ، ٠ }   ⓓ { ٨ }

٦) مجموعة حل المعادلة ٧ ^٢س - ٦^ = ١ فى ح هى ....

Ⓐ { ٦ }   ⓑ { ١ }   ⓙ { -٣ }   ⓓ { ٣ }

٧) عدد جذور المعادلة س ^٣^ = ٤ في ك (مجموعة الاعداد المركبة) هى ....

Ⓐ ١   ⓑ ٢   ⓙ ٣   ⓓ ٤



٨) مجموعة حل المعادلة $(س - ٣)^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ فى ح هى ....

ⓐ { ٢ } ب) { ١١ } ج) { ١١ ، -٥ } د) { -١١ ، ١١ }

٩) إذا كان $٣^{س} = ٢$ فإن $٢٧^{س} =$ ....

ⓐ ١٨ ب) ٨ ج) ٤ د) ١٦

١٠) إذا كان $٥^{س} = ٤$ فإن $٥^{س+٢} =$ ....

ⓐ ٢٠ ب) ٤٠ ج) ٨٠ د) ١٠٠

اجابة التمارين على الدرس الثالث

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
أ	ج	ج	ب	ج	د	ج	ب	ب	د



الدرس الرابع : الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني

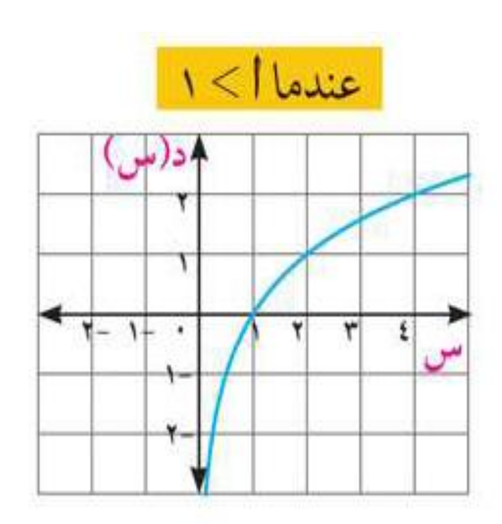
المفاهيم الاساسية:

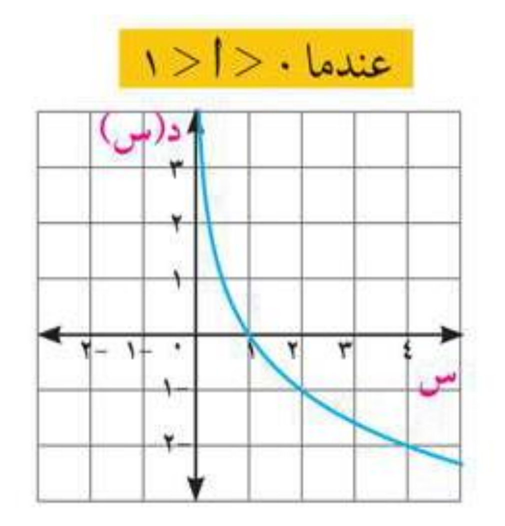
- الصورة العامة للدالة اللوغاريتمية هي د حيث د: ع$^{+}$ ← ح ، د(س) = لو$_{م}$ س ، م ∈ ع$^{+}$ - { ١ }

- مجال الدالة اللوغاريتمية هو ع$^{+}$ بينما مداها ح
- يمكن التحويل بين الصورة الاسية والصورة اللوغاريتمية فإذا كان

س = م^{ص} فإن ص = لو$_{م}$ س

- التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية
- تمثل الدالة اللوغاريتمية د : د(س) = لو$_{م}$ س ، م ∈ ع$^{+}$ - { ١ } بيانيا كما في الاشكال التالية

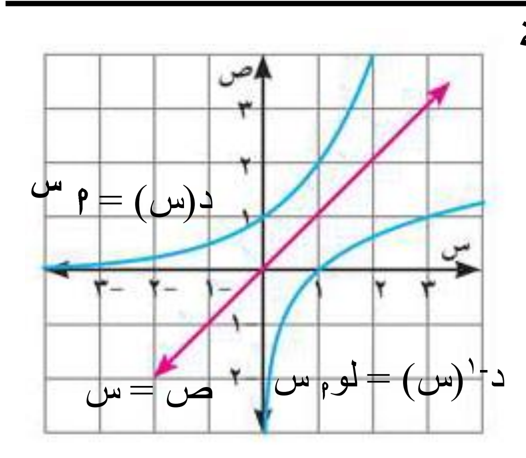




ونلاحظ أن منحنى الدالة اللوغاريتمية يقطع محور السينات في النقطة (١ ، ٠) ، و أن الدالة تزايدية عندما م > ١ ، وتناقصية عندما ٠ < م < ١

نلاحظ ايضا أن منحنى الدالة الاسية ومنحنى الدالة اللوغاريتمية

كل منهما صورة للأخر بالاتعكاس في المستقيم ص = س



اللوغاريتمات المعتادة

إذا كان أساس اللوغاريتم ١٠ يسمى باللوغاريتم المعتاد ويكتب اللوغاريتم بدون أساس ويفهم ضمنيا بأن الاساس ١٠ فمثلا لو ٥ تعني لو$_{١٠}$ ٥

الامثلة

مثال ١ :

حول من الصورة الاسية الى الصورة اللوغاريتمية

(أ) $٣^{٢}$ = ٩ (ب) $٢^{٥}$ = ٣٢ (ج) $١٠^{٢}$ = ١٠٠

الحل

(أ) $٣^{٢}$ = ٩ ⟸ لو$_{٣}$ ٩ =٢

(ب) $٢^{٥}$ = ٣٢ ⟸ لو$_{٢}$ ٣٢ = ٥

(ج) $١٠^{٢}$ = ١٠٠ ⟸ لو ١٠٠ = ٢

تدريب ١ :

حول من الصورة الاسية الى الصورة اللوغاريتمية

(أ) $٥^{٤}$ = ٦٢٥ (ب) $٤^{٣}$ = ٦٤ (ج) $١٠^{٣}$ = ١٠٠٠



مثال ٢ :

حول من الصورة اللوغاريتمية الى الصورة الاسية

ⓐ لو$_{٥}$ ١ = ٠ ⓑ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٤}$ = ـ ٢ ⓙ لو$_{٣}$ ٨١ = ٤

الحل

ⓐ لو$_{٥}$ ١ = ٠ ⟸ ٥^{٠} = ١

ⓑ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٤}$ = ـ ٢ ⟸ ٢$^{-٢}$ = $\frac{١}{٤}$

ⓙ لو$_{٣}$ ٨١ = ٤ ⟸ ٣^{٤} = ٨١

تدريب ٢ :

حول من الصورة اللوغاريتمية الى الصورة الاسية

ⓐ لو$_{٥}$ ٥ = ١ ⓑ لو$_{٣}$ $\frac{١}{٣}$ = ـ ١ ⓙ لو$_{٢}$ ١٢٨ = ٧

مثال ٣:

أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

ⓐ لو$_{٥}$ (س+٢) = ٣ ⓑ لو$_{س}$ (س + ١٢) = ٢ ⓙ لو$_{٣}$ ٢٧ = س

الحل

ⓐ لو$_{٥}$ (س+٢) = ٣

المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق س + ٢ > ٠ أي س > -٢ (مجال تعريف المتغير)

∵ لو$_{٥}$ (س+٢) = ٣ ⟸ ٥^{٣} = س+٢ ⟸ ١٢٥ = س + ٢

⟸ س = ١٢٣ ∋ مجال تعريف المتغير

∴ مجموعة الحل = { ١٢٣ }



(ب) لو$_{س}$ (س + ١٢) = ٢

المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق س + ١٢ > ٠ ⟸ س > ـ ١٢ (١)

س > ٠ ، س ≠ ١ (٢)

من (١) ، (٢) س ∈ ع$^{+}$ - {١} (مجال تعريف المتغير)

∵ لو$_{س}$ (س + ١٢) = ٢ ⟸ س^{٢} = س+١٢ ⟸ س^{٢} ـ س ـ ١٢ = ٠

(س ـ ٤) (س + ٣) = ٠

⟸ س = ٤ ∈ مجال تعريف المتغير ، س = ـ ٣ ∉ مجال تعريف المتغير

∴ مجموعة الحل= {٤}

(جـ) لو$_{٣}$ ٢٧ = س (مجال تعريف المتغير هو ح)

∵ لو$_{٣}$ ٢٧ = س ⟸ ٢٧ = ٣^{س} ⟸ ٣^{٣} = ٣^{س}

⟸ س = ٣ ∈ مجال تعريف المتغير ∴ مجموعة الحل = {٣}

تدريب ٣:

أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) لو$_{٤}$ (س ـ ١) = ٢ (ب) لو$_{س}$ (٢س + ٨) = ٢ (جـ) لو$_{٢}$ ٨ = س

حلول التدريبات

تدريب (١)

(أ) لو$_{٥}$ ٦٢٥ = ٤ (ب) لو$_{٤}$ ٦٤ = ٣ (جـ) لو ١٠٠٠ = ٣

تدريب (٢)

(أ) ٥^{١} = ٥ (ب) ٣$^{-١}$ = $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٢^{٧} = ١٢٨

تدريب (٣)

(أ) مجموعة الحل = {١٧} (ب) مجموعة الحل = {٤} (جـ) مجموعة الحل = {٣}

تمارين على الدرس الرابع

السؤال الاول : اختر الاجابة الصحيحة

١) إذا كان $ا^{ب}$ = جـ فإن ....

(ا) $لو_{ا}$ ب = جـ (ب) $لو_{ا}$ جـ = ب (جـ) $لو_{ب}$ جـ = ا (ء) $لو_{جـ}$ ب = ا

٢) المعادلة الاسية $س^{٣}$ = ١٢٥ يمكن التعبير عنها بالصورة اللوغارتمية ....

(ا) $لو_{س}$ ١٢٥ = ٣ (ب) $لو_{س}$ ٣ = ١٢٥ (جـ) $لو_{٣}$ ١٢٥ = س (ء) $لو_{٣}$ س = ١٢٥

٣) إذا كان $لو_{٢}$ (س − ١) = ٤ فإن س = ...

(ا) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (ء) ١٧

٤) إذا كان منحنى الدالة د(س) = $لو_{٢}$ (٣س + ١) يمر بالنقطة (ك ، ٤) فإن ك = ...

(ا) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (ء) ٥

٥) مجموعة حل المعادلة $لو_{س}$ (٢س+١٥) = ٢ هي.......

(ا) {٣ ، ٥} (ب) {٥ ، −٣} (جـ) {٥} (ء) {٣}

٦) مجموعة حل المعادلة $لو_{٣}$ (٥س − ٦) = ٢ هي.......

(ا) {٤} (ب) {٣} (جـ) {٩} (ء) {٦}

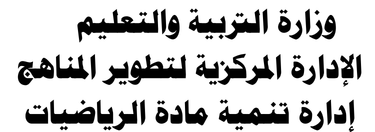
٧) مجموعة حل المعادلة $لو_{٥}$ ٦٢٥ = س هي.......

(ا) {٢٥} (ب) {٥} (جـ) {٤} (ء) {٣}

اجابة تمارين الدرس الرابع

١) ب ٢) ٩ ٣) ء ٤) ء ٥) جـ

٦) ب ٧) جـ





الدرس الخامس : بعض خواص الدالة اللوغاريتمية

المفاهيم الاساسية:

١) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = ١$ ، $\text{لو}_{\text{أ}}\,١ = \text{صفر}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$

٢) $\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س ص}) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ح}^{+}$

٣) $\text{لو}_{\text{أ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ح}^{+}$

٤) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{ن} \in \text{ح}$

٥) $\text{لو}_{\text{س}}\,\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}$ حيث $\text{س} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{ص} \in \text{ح}^{+}$

٦) $\text{لو}_{\text{س}}\,\text{ص} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س}}$ حيث $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$

٧) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص} \Longleftarrow \text{س} = \text{ص}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ح}^{+}$

٨) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{ص} \Longleftarrow \text{س} = \text{أ}^{\text{ص}}$ حيث $\text{أ} \in \text{ح}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ح}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ح}$



الامثلة

مثال ١ : بإستخدام خواص اللوغاريتمات ضع المقدار الاتي في صورة لوغاريتم واحد فقط

٣ لو س + $\frac{1}{2}$ لو ص ـ ٢ لو ع

الحل

٣ لو س + $\frac{1}{2}$ لو ص ـ ٢ لو ع = لو س^{3} + لو ص$^{\frac{1}{2}}$ ـ لو ع^{2}

= لو (س^{3} ص$^{\frac{1}{2}}$) ـ لو ع^{2}

= لو $\frac{س^{3}\sqrt{ص}}{ع^{2}}$

تدريب ١ : بإستخدام خواص اللوغاريتمات ضع المقدار الاتي في صورة لوغاريتم واحد فقط

٥ لو س + لو ص ـ ٣ لو ع^{2}

مثال ٢ : بإستخدام خواص اللوغاريتمات ضع المقدار الاتي في صورة مجموع وفرق لوغاريتمات

لو $\frac{١٠ س^{4}}{ص ع^{2}}$

الحل

لو $\frac{١٠ س^{4}}{ص ع^{2}}$ = لو ١٠ + لو س^{4} ـ لو (ص ع^{2})

= ١ + ٤ لو|س| ـ (لو ص + لو ع^{2})

= ١ + ٤ لو|س| ـ لو ص ـ ٢ لو |ع|

تدريب ٢ : بإستخدام خواص اللوغاريتمات ضع المقدار الاتي في صورة مجموع وفرق لوغاريتمات

لو $\frac{١٠٠ س^{3} ص^{2}}{ع}$

مثال ٣ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

لو ٢ (س+١) ـ لو ٢ (س ـ ١) = لو ٢ ٣

الحل:

مجال تعريف المتغير س + ١ > ٠ ، س ـ ١ > ٠

⟸ س > ـ ١ ، س > ١ ⟸ س > ١ أي س ∈] ١ ، ∞ [

لو ٢ (س+١) ـ لو ٢ (س ـ ١) = لو ٢ ٣ ⟸ لو ٢ ($\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$) = لو ٢ ٣

⟸ ٣ = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ ⟸ س + ١ = ٣ س ـ ٣

٢ س = ٤ ⟸ س = ٢ ∴ مجموعة الحل = { ٢ }

تدريب ٣ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

لو ٥ (س+٢) ـ لو ٥ (س ـ ٢) = لو ٥ ٣

مثال ٤ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

لو ٢ (س+١) ـ لو ٢ (س ـ ١) = ٣

الحل:

مجال تعريف المتغير س + ١ > ٠ ، س ـ ١ > ٠

⟸ س > ـ ١ ، س > ١ ⟸ س > ١ أي س ∈] ١ ، ∞ [

لو ٢ (س+١) ـ لو ٢ (س ـ ١) = ٣ ⟸ لو ٢ ($\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$) = ٣

⟸ $٢^{٣}$ = ٨ = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ ⟸ س + ١ = ٨ س ـ ٨

٧ س = ٩ ⟸ س = $\frac{٩}{٧}$ ∴ مجموعة الحل = { $\frac{٩}{٧}$ }



تدريب ٤ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

$$\text{لو}_{٢}\ \text{س} - \text{لو}_{٢}\ (\text{س} - ١) = ١$$

مثال ٥ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

$$\text{لو}_{٢}\ \text{س} + \text{لو}_{٢}\ (\text{س} - ١) = \text{لو}_{٢}\ ٦$$

الحل

مجال تعريف المتغير س > ٠ ، س - ١ > ٠ ⟸ س > ١ أي س ∈] ١ ، ∞ [

لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س - ١) = لو$_{٢}$ ٦ ⟸ لو$_{٢}$ [س (س - ١)] = لو$_{٢}$ ٦

⟸ س (س - ١) = ٦ ⟸ س^{٢} - س - ٦ = ٠ ⟸ (س + ٢) (س - ٣) = ٠

⟸ س = - ٢ مرفوض ∉] ١ ، ∞ [

أو س = ٣ مقبول ∴ مجموعة الحل = { ٣ }

تدريب ٥ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

$$\text{لو}_{٣}\ \text{س} + \text{لو}_{٣}\ (\text{س} + ٢) = \text{لو}_{٣}\ ٨$$

حلول التدريبات

تدريب (١) لو $\left(\frac{\text{س}^{٥}\ \text{ص}}{\text{ع}^{٣}}\right)$

تدريب (٢) ٢ + ٣ لو س + ٢ لو |ص| - لو ع

تدريب (٣) مجموعة الحل = { ٤ }

تدريب (٤) مجموعة الحل = { ٢ }

تدريب (٥) مجموعة الحل = { ٢ }



تمارين على الدرس الخامس

السؤال الاول : اختر الاجابة الصحيحة

١) إذا كان لو (س ـ ٥) = ٠ فإن س = ...

ⓐ ٠ ⓑ ١ ⓒ ٥ ⓓ ٦

٢) مجموعة حل المعادلة لو (س+٣) = ١ هي...............

ⓐ { ٠ } ⓑ { ـ٣ } ⓒ { ٤ } ⓓ { ٧ }

٣) لو ($\frac{س^٣}{ص}$) = ...

ⓐ ٣(لو س ـ لو ص) ⓑ ٣(لو س + لو ص)

ⓒ ٣ لو س ـ لو ص ⓓ ٣ لو س + لو ص

٤) مجموعة حل المعادلة $لو_٩$ $س^٢$ = ١ هي...............

ⓐ { ٩ } ⓑ { ٣ } ⓒ { ٣، ـ٣ } ⓓ { ٠ }

٥) مجموعة حل المعادلة $لو_٢$ (س+٣) ـ $لو_٢$ (س ـ ٥) = $لو_٢$ ٣ في ح هي ....

ⓐ { ٩ } ⓑ { ٨ } ⓒ { ٦ } ⓓ { ٣ }

٦) مجموعة حل المعادلة $لو_٢$ (س+٣) + $لو_٢$ (س ـ ٥) = $لو_٢$ ٩ في ح هي ....

ⓐ { ٩ } ⓑ { ٨ } ⓒ { ٦ } ⓓ { ٣ }

اجابة تمارين الدرس الخامس

١) د   ٢) د   ٣) جـ   ٤) جـ   ٥) م   ٦) جـ



تمارين على الوحدة الثانية :الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات

١) إذا كان د(س) = ٢ ^س^ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) = ١٦ هى ....

أ) { ٤ }   ب) { ٣ }   ج) { ١٥ }   د) { ٨ }

٢) إذا كان د(س) = ٣ ^س^ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) – د(س – ١)= ٢٤ هى ....

أ) { ٢ }   ب) { ٣ }   ج) { ٠ }   د) { ٨ }

٣) إذا كان ٤ س ^٥^ = ١٢٨ فإن س =........

أ) ٤   ب) ± ٢   ج) ٢   د) -٢

٤) إذا كان ٢ ^س^ = ٣ ، ٣ ^ص^ = ٨ ، فإن ٣ ^س ص^ = ...

أ) ٣   ب) ٨   ج) ٢٤   د) ٢٧

٥) إذا كان د(س-١) = ٣ ^س+١^ ، فإن د(س) = ...

أ) ٣ ^س^   ب) ٣ ^س - ١^   ج) ٣ ^س +١^   د) ٣ ^س +٢^

٦) الدالة الأسية التى أساسها أ تكون تناقصية إذا كان ....

أ) أ> ٠   ب) أ< ٠   ج) ١> أ > ٠   د) ٠> أ >-١

٧) مجموعة حل المعادلة لو~س~ ٦٤ = ٢ هى ....

أ) { ٨ ، -٨ }   ب) { ٨ }   ج) { -٨ }   د) { ٣٢ }



٨) إذا كان ٥ $^{س + ٢}$ = ٨ $^{س + ٢}$ ، فإن س = ...

أ) ١ ب) ٢ جـ) -٢ د) -٨

٩) إذا كان ٢ $^{س+٣}$ = ٣٢ فإن س = ...

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٥ د) ٨

١٠) إذا كان ٣ ^{س} = ٥ ، فإن ٩ ^{س} = ...

أ) ٥ ب) ١٠ جـ) ١٥ د) ٢٥

١١) إذا كان لو $_{٤}$ س =٢ ، فإن س = ...

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٨ د) ١٦

١٢) إذا كان لو $_{٥}$ (س+١١) =٢ ، فإن س = ...

أ) -١ ب) ٢١ جـ) ١٤ د) ٣٦

١٣) إذا كان لو $_{٢}$ لو $_{٥}$ لو $_{٢}$س=٠ ، فإن س = ...

أ) ٤ ب) ٨ جـ) ١٦ د) ٣٢



١٤) لوه ٣ + ٣ لوه ٢ = ...

(أ) لوه ٢٤ (ب) لوه ١٢ (ج) لوه ١٨ (د) لو ٢٤

١٥) إذا كان ٣^{س} = ٧ ، فإن س = ...

(أ) لو$_{٣}$ ٧ (ب) لو$_{٧}$ ٣ (ج) لو ٣ (د) لو ٧

اجابة التمارين على الوحدة الثانية

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ب	أ	ج	د	د	ج	ب	ج
٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	
ب	د	د	ج	د	أ	أ	



الاختبار الأول على الوحدة الثانية

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١) إذا كان لو$_{ص}$ س + لو$_{ص}$ ٣ = لو$_{ص}$ ٢٧ - ١ ، فأى مما يأتي يعبر عن س بدلالة ص ....

(أ) س = ٩ص (ب) س = $\frac{٩}{ص}$ (ج) س = $\frac{ص}{٩}$ (د) س = $\frac{١}{ص}$

٢) مجموعة حل المعادلة لو$_{٢}$ س - $\frac{٣}{لو_{٢} س}$ = ٢ هى ....

(أ) { -١، ٣ } (ب) { ٨ ، ٠،٥ } (ج) { ٨ ، ٢ } (د) { ٠،١٢٥، ٢ }

٣) إذا كان د(س - ١) = ٢ $^{س-٥}$ ، د(س +٣) = $\frac{١}{٣٢}$ فإن س = ...

(أ) - ٤ (ب) - ٢ (ج) ٤ (د) ٦

٤) مجموعة حل المعادلة لو$_{س}$(٢- س) = ٢ في ح هى ....

(أ) { ١ ، -٢ } (ب) { ١ } (ج) { -٢ } (د) ∅

٥) مجموعة حل المعادلة $\sqrt[٣]{(س-١)}^{٥}$ = ٣٢ في ح هى ....

(أ) { ٨ } (ب) { $\frac{١}{٨}$ } (ج) { ٩ } (د) { -٩ }

٦) الدالة الأسية التى أساسها أ تكون تزايدية على مجالها إذا كان ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (ج) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

٧) إذا كانت د(س) = ٣ ^{س}، فإن د(س+٢) × د(س − ٢) = ...

(أ) د(٢س) (ب) د(س) (ج) د(٣س) (د) ٢ د(س)



٨) مجموعة حل المعادلة $لو_٢ (٤^{س} - ٢) = س$ هى .... حيث س ∈ ح

(أ) {-١ ، ٢}   (ب) {١}   (جـ) {-١}   (د) ∅

الاسئلة المقالية

١) إذا كانت $د_١(س) = ٣^{س}$ ، $د_٢(س) = ٩^{س}$ فأوجد قيمة س التى تحقق $د_١(٢س-١) + د_٢(س+١) = ٧٥٦$

٢) أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $لو_٨(س - ٢) + لو_٢(س - ٢) = ٤$

حل الامتحان الأول على الوحدة الثانية

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ب	ب	أ	د	جـ	ب	أ	ب

١) س = ٢   ٢) {١٠}



الاختبار الثانى على الوحدة الثانية

١) مجال الدالة د(س) = $لو_{١-س}$ ٣ هو ....

أ)]-∞، ٠[ب)]١، ∞[ج)]-∞، ١[- {٠} د)]٠، ١[

٢) إذا كان $٢^{س-١}$ = $٨^{س-١}$ فإن $٦^{س-١}$ = ...

أ) ٢ ب) ٧ ج) ١ د) ٠

٣) إذا كان $٣^{٢س -١}$ = ٢٤٣ ، فإن س = ...

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٥ د) ٦

٤) إذا كان $٣^{ب}$ = ٢٥ ، $٥^{أ}$ = ٢٧ فإن أ ب = ...

أ) ١٠ ب) ٦ ج) ١٢ د) ١٥

٥) إذا كان $لو_{٩}$ س × $لو_{٥}$ ٨ × $لو_{١١}$ ٣ × $لو_{٢}$ ٢٥ = ٣ فإن س =........

أ) ٩ ب) ١١ ج) ٥ د) ٢

٦) $لو_{س ص ع}$ س + $لو_{س ص ع}$ ص + $لو_{س ص ع}$ ع = ...

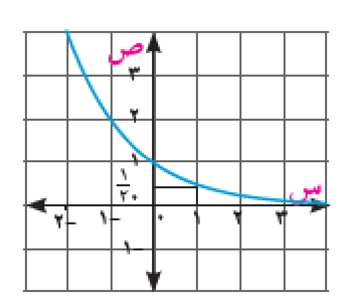
أ) س ص ب) س ص ع ج) ١ د) س ع

٧) إذا كان $٥^{أ}$ = ص فإن $٢٥^{أ+٢}$ = ...

أ) ص ب) $ص^{٢}$ ج) ٦٢٥ د) ٦٢٥ $ص^{٢}$



٨) الشكل المقابل يمثل الدالة



ⓐ د(س) = ٢ ^س+١^ ⓑ د(س) = ٢ ^- س^

ⓒ د(س) = ٣ ^- س^ ⓓ د(س) = ٢ ^س^

الاسئلة المقالية

١) أوجد مجموعة حل المعادلة الاتية فى ح لو٣ (س +٦) =٢ لو٣ س

٢) اشترى شخص سيارة بمبلغ ٢٥٠٠٠٠ جنية ، فإذا كان سعر السيارة يزيد بمعدل ٥٪ سنويا

كم يصبح سعر السيارة بعد ٦ سنوات ؟

حل الامتحان الثانى على الوحدة الثانية

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ج	ج	ب	ب	ب	ج	د	ب

١) مجموعة الحل ={٣}

٢) ٣٣٥٠٢٤ جنية تقريبا



رياضيات

الصف الثانوى (أدبي)

الوحدة الثالثة (النهايات)

المحتويات



الوحدة الثالثة – النهايات ــ القسم الأدبي

الدرس الأول: مقدمة فى النهايات

المفاهيم الاساسية:

١ ـ **الكمية المعينة:** هي الكمية التي لها ناتج محدد مثل $\frac{٤}{٥}$ ، ٧ ، ٠,٤٥ ، $\sqrt{٣٠٢}$

٢ ـ **الكمية الغير معينة :** هي الكمية التي ليس لها ناتج محدد مثل: $\infty - \infty$ ، $\frac{٠}{٠}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty \times ٠$

٣ ـ **الكمية الغير معرفة:** هي الكمية التي ليس لها جواب على الإطلاق

ملحوظة:

إذا كان أ ∈ ح فإن :-

١) $\infty + أ = \infty$ ٢) $-\infty + أ = -\infty$

٣) $\infty \times أ = \begin{cases} \infty & : أ > ٠ \\ -\infty & : أ < ٠ \end{cases}$

٤) $-\infty \times أ = \begin{cases} \infty & : أ < ٠ \\ -\infty & : أ > ٠ \end{cases}$

مثال (١): أوجد ناتج العمليات الاتية إذا كان ذلك ممكنا :

١) $٥ + \infty$ ٢) $٦ \div ٠$ ٣) $-٤ \times \infty$ ٤) $\infty \times ٧$ ٥) $٥ - \infty$

الحل:

١) ∞ ٢) غير معرفة ٣) $-\infty$ ٤) ∞ ٥) $-\infty$

تدريب (١): أوجد ناتج العمليات الاتية إذا كان ذلك ممكنا :

١) $٥ \div ٠$ ٢) $٦ \times \infty$ ٣) $\infty \div \infty$ ٤) $٠ \div ٨$ ٥) $٠ \div ٠$



نهاية دالة عند نقطة

مثال (٢): إذا كانت د (س) = ٢ س +١ فأوجد نهــــا د(س)
س ←٢

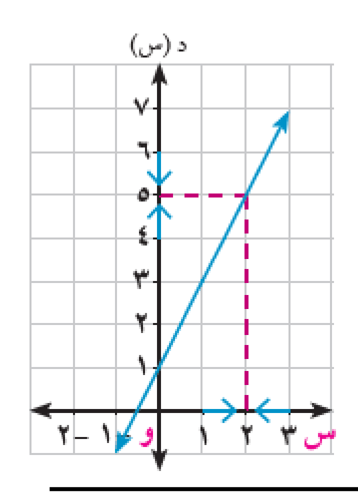
الحل

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	....	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
د(س)	٥,٢	٥,٠٢	٥,٠٠٢	٥,٠٠٠٢	....	٤,٩٩٩٨	٤,٩٩٨	٤,٩٨	٤,٨

نلاحظ : من الجدول السابق والتمثيل البيانى المقابل :

انه كلما اقتربت س من العدد ٢ من جهتي اليمين و اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من العدد ٥

و هذه العبارة تكتب : نهــــا د(س) = ٥
س ← ٢



تدريب (٢)

إذا كانت د (س) = ٢ س - ٣ فأكمل الجدول التالى و ماذا تلاحظ ؟

س	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١	٥,٠٠٠١	....	٤,٩٩٩٩	٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
د(س)	......	......	......	......	......	......	......	......	......

نلاحظ : أنه كلما اقتربت س من العدد .... من جهتي اليمين و اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من العدد ...

∴ نهــــا (٢س -٣) = ...
س ← ٥

تعريف:

إذا كانت قيم د(س) تقترب من العدد الحقيقى ل كلما اقتربت س من العدد الحقيقى أ من جهتي اليمين و اليسار فإن : نهــــا د(س) = ل
س ← أ

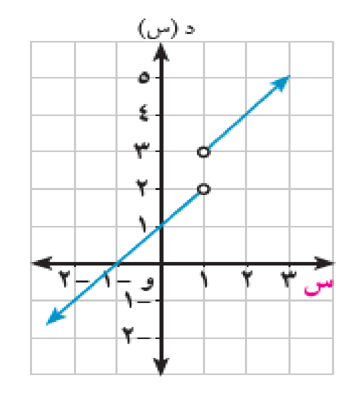


مثال (٣): إذا كانت د(س) = { س + ٢ ، س < ١ ؛ س + ١ ، س > ١ }

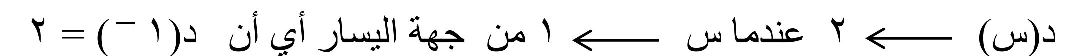
ارسم منحنى الدالة د وأبحث وجود نهـــــــا د(س) (س ← ١)

الحل:

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	....	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩
د(س)	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣,٠٠٠١		١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩



نلاحظ : من الجدول ومن الشكل البيانى أن :-


د(س) ⟵ ٢ عندما س ⟵ ١ من جهة اليسار أي أن د(١^-) = ٢

د(س) ⟵ ٣ عندما س ⟵ ١ من جهة اليمين أي أن د(١^+) = ٣

∵ د(١^-) ≠ د(١^+)

∴ نهـــــــا د(س) (س ← ١) غير موجودة

تدريب (٣):

إذا كانت د(س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ -٢ ، س < ٠ }

ارسم منحنى الدالة د وأبحث وجود نهـــــــا د(س) (س ← ٠)

مثال (٤): الشكل البيانى المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د

استعن بالشكل في الاجابة عن الاسئلة التالية :

١) مجال د(س) = ...

أ) ح – { ٢ }　　ب) ح – { -٢ }　　ج) ح　　د) { -٤ }

٢) د(ـ ٢) = ...

أ) ـ٤ ب) ٤ ج) غير معرفة د) صفر

٣) نهـــا د(س) = ...
س ← ـ ٢

أ) ـ٤ ب) ٤ ج) غير موجودة د) صفر

٤) نهـــا د(س) =.......
س ← ٢

أ) ـ٤ ب) ٤ ج) غير موجودة د) صفر

حل مثال (٤):

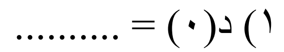
١) ح – { -٢ } ٢) غير معرفة ٣) -٤ ٤) ٠

ملحوظة هامة:

في المثال السابق: مجال الداله د(س) = ح ـ { ـ ٢ } وبالرغم من ذلك يوجد نهاية للدالة عندما س ← -٢

(معنى ذلك انه يمكن أن يوجد نهاية للدالة عندما تقترب س من عدد معين حتى لو كانت الدالة غير معرفة عند هذا العدد)

تدريب (٤): الشكل البيانى المقابل يمثل د(س) : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :



١) د(٠) = ...

أ) ١ ب) ٤ ج) غير معرفة د) ـ ٢



٢) د(٢) = ...

أ) ٣ ب) ٤ ج) غير معرفة د) صفر



٣) نهـــــا د(س) = ...
س ←

ⓐ ١ ⓑ ٤ ⓙ غير موجودة ⓓ صفر

٤) نهـــــا د(س)
س ←

ⓐ ٣ ⓑ ٤ ⓙ غير موجودة ⓓ صفر

حلول التدريبات:

حل تدريب (١)

١) غير معرفة ٢) ∞ ٣) غير معينه ٤) ٠ ٥) كمية غير معينه

حل تدريب (٢):

س	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١	٥,٠٠٠١	....	٤,٩٩٩٩	٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
د(س)	٧,٢	٧,٠٢	٧,٠٠٢	٧,٠٠٠٢	٧	٦,٩٩٩٨	٦,٩٩٨	٦,٩٨	٦,٨

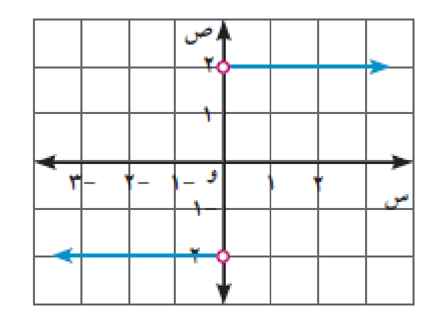
نلاحظ أنه كلما اقتربت س من العدد ٥ من جهتي اليمين و اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من العدد ٧

∴ نهــــا (٢س - ٣) = ٧
س ← ٥

حل تدريب (٣):

س	-٠,١	-٠,٠١	-٠,٠٠١	-٠,٠٠٠١	٠	٠,٠٠٠١	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١
د(س)	-٢	-٢	-٢	-٢		٢	٢	٢	٢

نلاحظ من الجدول ومن الشكل البيانى أن :-



د(س) ← -٢ عندما س ← ٠ من جهة اليسار د(٠^-) = -٢

د(س) ← ٢ عندما س ← ٠ من جهة اليمين د(٠^+) = ٢

أى أن د(٠^-) ≠ د(٠^+)

∴ نهــــا د(س) غير موجودة
س ← ٠

حل تدريب (٤):

١) ١ ٢) غير معرفة ٣) غير موجودة ٤) ٣



تمارين على الدرس الاول

١) إذا كانت د دالة حقيقية وكان الجدول التالي يبين بعض قيم الدالة عند قيم محددة للمتغير س

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	←	٣	→	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
د(س)	٦,١	٦,٠١	٦,٠٠١	←	.....	→	٥,٩٩٩	٥,٩٩	٥,٩

فإن نهــا (س ← ٣) د(س) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (ج) ٦ (د) غير موجودة

٢) إذا كان نهــا (س ← ١) د(س) = ٢ فإن هذا يعني أن.................................

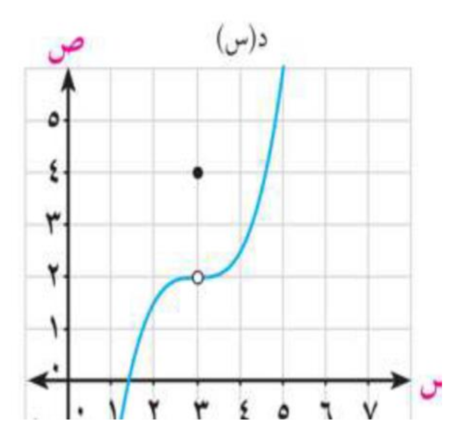
(أ) الدالة د معرفة عند س = ١

(ب) الدالة د غير معرفة عند س = ١

(ج) د(١) = ٢

(د) كلما اقتربت س من العدد ١ من جهتي اليمين و اليسار فإن د(س) تقترب من العدد ٢

٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل الرسم البياني للدالة د فإن..........



(أ) الدالة غير معرفة عند س = ٣

(ب) د(٣) = ٢

(ج) نهــا (س ← ٣) د(س) = ٢

(د) نهــا (س ← ٣) د(س) = ٤



٤) إذا كانت د : [– ٤ ، ٤] – { – ٢ } ← ح

والشكل البياني المقابل يبين التمثيل البياني

للدالة د فإن ....

ٱ) د(-٢) = صفر

ب) د(٠) = – ٣

ج) نهـــا د(س) = صفر (س ← – ٢)

د) نهـــا د(س) غير موجودة (س ← – ٢)

٥) جميع الكميات الاتية تمثل كميات غير معينة عدا ....

ٱ) صفر / –٧

ب) ∞ × صفر

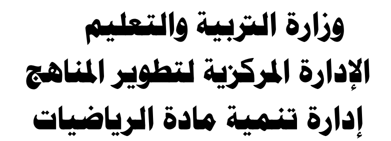
ج) ∞ / ∞

د) ∞ – ∞

حلول تمارين الدرس الأول

١) ج ٢) د ٣) ج ٤) ج ٥) ٱ





الدرس الثانى : إيجاد نهاية الدالة جبريا

المفاهيم الأساسية للدرس

نظرية (١): إذا كانت د(س) كثيرة حدود , أ ∋ ح فإن: $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ)

مثال (١):

أوجد: $\lim_{س \to ٢}$ (س^{٢} – ٩ س + ٧)

الحل:

$\lim_{س \to ٢}$ (س^{٢} – ٩ س + ٧) = ٤ – ١٨ + ٧ = -٧

تدريب (١)

أوجد: $\lim_{س \to ٣}$ (س^{٢} + س + ٥)

نظرية (٢):-

إذا كان $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ ى (س) = م فإن

١) $\lim_{س \to أ}$ ك د(س) = ك ل ، ك ∋ ح

٢) $\lim_{س \to أ}$ {د(س)±ى (س)}= ل±م

٣) $\lim_{س \to أ}$ {د(س) . ى (س)}= ل.م

٤) $\lim_{س \to أ}$ $\frac{د(س)}{ى (س)}$ = $\frac{ل}{م}$ حيث م ≠ ٠

٥) $\lim_{س \to أ}$ (د(س))^{ن} = ل^{ن} ، حيث ل^{ن} ∋ ح

نظرية (٣)

إذا كانت د(س) = ى (س) لكل س ∋ ح -{أ}

وكان $\lim_{س \to أ}$ ى (س) = ل فإن $\lim_{س \to أ}$ د (س) = ل

مثال (٢):

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

الحل:

بفرض أن د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ **فإن د(٢) =** $\frac{٤ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ٢} (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$

تدريب (٢):

أوجد: $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{س - ٢}$

مثال (٣):

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣}$

الحل

$\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣} = \lim\limits_{س \leftarrow -٣} \frac{(س + ٣)(س^{٢} - ٣س + ٩)}{س + ٣}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow -٣} (س^{٢} - ٣س + ٩) = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧$

تدريب (٣)

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$

مثال (٤):

أوجد: $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - س - ٢}$

الحل

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س + ١)} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢ + ١} = ٤$



تدريب (٤) :

أوجد: $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} + ٢\,س}$

مثال(٥):

أوجد $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢س}{(س+٣)^{٢} - ٩}$

الحل

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,س}{س^{٢} + ٦\,س + ٩ - ٩} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,س}{س^{٢} + ٦\,س}$

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,س}{س\,(س + ٦)} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢}{س + ٦} = \frac{١}{٣}$

تدريب (٥):

أوجد : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٣\,س - ٢)^{٢} - ٤}{٧\,س}$

ملحوظة :

يمكن استخدام القسمة المطولة لتحليل المقدار الجبرى

مثال (٦):

أوجد : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - س^{٢} - ٦\,س + ٨}{س^{٢} - ٥\,س + ٦}$

الحل

$س^{٣} - س^{٢} - ٦\,س + ٨$	$س - ٢$
$-\;(س^{٣} - ٢\,س^{٢})$	$س^{٢} + س - ٤$
$س^{٢} - ٦\,س + ٨$	
$-\;(س^{٢} - ٢س)$	
$-٤\,س + ٨$	
$-\;(-٤\,س + ٨)$	
٠ ٠	

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + س - ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢ + س - ٤)}{(س - ٣)} = -٢$$

تدريب (٦) :

أوجد: $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + س^٢ - ٧ س + ٢}{س^٢ - ٤}$

مثال (٧)

أوجد : $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س - ١}$

الحل

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س+٣} + ٢}{\sqrt{س+٣} + ٢} = \lim_{س \to ١} \frac{س + ٣ - ٤}{(س - ١)(\sqrt{س+٣} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{(س - ١)(\sqrt{س+٣} + ٢)} = \lim_{س \to ١} \frac{١}{\sqrt{س+٣} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

تدريب (٧):

أوجد : $\lim_{س \to -٣} \frac{\sqrt{س+٧} - ٢}{س + ٣}$

مثال (٨):

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س+١}-٢}{\sqrt{س+٦}-٣}$

الحل

$\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س+١}-٢}{\sqrt{س+٦}-٣} \times \frac{\sqrt{س+١}+٢}{\sqrt{س+١}+٢} \times \frac{\sqrt{س+٦}+٣}{\sqrt{س+٦}+٣} = \lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{(س+١-٤)(\sqrt{س+٦}+٣)}{(س+٦-٩)(\sqrt{س+١}+٢)}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{(س-٣)(\sqrt{س+٦}+٣)}{(س-٣)(\sqrt{س+١}+٢)} = \lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{(\sqrt{س+٦}+٣)}{(\sqrt{س+١}+٢)} = \frac{(\sqrt{٣+٦}+٣)}{(\sqrt{٣+١}+٢)} = \frac{٣}{٢}$

تدريب (٨):

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow ٥} \frac{\sqrt{س+٤}-٣}{\sqrt{س-١}-٢}$

نظرية (٤)

$\lim\limits_{س \leftarrow أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن \times أ^{ن-١}$

نتائج على نظرية (٤)

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{(س+أ)^ن - أ^ن}{س} = ن \times أ^{ن-١}$

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن-م}$

أمثلة محلولة

مثال (٩)

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٦ - ٦٤}{س - ٢}$

الحل

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٦ - ٢^٦}{س - ٢} = ٦ \times ٢^٥ = ٦ \times ٣٢ = ١٩٢$

تدريب (٩)

أوجد : $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{س^{٥} + ٣٢}{س + ٢}$

مثال (١٠)

أوجد : $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٣} - ٨}$

الحل

$\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٧} - ٢^{٧}}{س^{٣} - ٢^{٣}} = \frac{٧}{٣} \times ٢^{٤} = \frac{١١٢}{٣}$

تدريب (١٠)

أوجد : $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٤}$

مثال (١١)

أوجد: $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{٢س^{٥} - ٤٨٦}{س^{٢} - ٩}$

الحل:

بأخذ ٢ عامل مشترك من البسط

$= ٢ \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س^{٢} - ٩} = ٢ \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٥} - ٣^{٥}}{س^{٢} - ٣^{٢}} = ٢ \times \frac{٥}{٢} \times ٣^{٣} = ١٣٥$

تدريب (١١)

أوجد: $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{٢س^{٩} + ١٠٢٤}{س^{٢} - ٤}$

مثال (١٢)

أوجد : $\lim_{٢س \leftarrow ١} \frac{٣٢س^{٥} - ١}{٢س - ١}$

الحل

$$\underset{٢س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{(٢س)^{٥} - ١^{٥}}{٢س - ١} = ٥ \times ١^{٤} = ٥$$

تدريب (١٢)

أوجد : $\underset{٣س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{٢٧س^{٣} - ١}{٣س - ١}$

مثال (١٣)

أوجد : $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{س^{٢} - ٦٤}$

الحل

$$\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهـــا}} \frac{س^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{س^{٢} - ٨^{٢}} = \frac{\frac{١}{٣}}{٢} \times ٨^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{١}{١٩٢}$$

تدريب (١٣)

أوجد : $\underset{س \leftarrow ٢٧}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٣}{س^{٢} - ٧٢٩}$

مثال (١٤)

أوجد : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{س^{١٧} - ١}{٣س^{٢} + ٢س - ٥}$

الحل

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{س^{١٧} - ١}{(٣س+٥)(س-١)} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{س^{١٧} - ١^{١٧}}{س - ١} \times \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{١}{٣س + ٥}$$

$$= ١٧ \times ١^{١٦} \times \frac{١}{٨} = \frac{١٧}{٨}$$

تدريب (١٤)

أوجد : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٢} - س - ٢}$



مثال (١٥)

أوجد : $\lim_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٦٢٥}{٧س}$

الحل

$\lim_{س+٥ \to ٥} \left(\frac{(س+٥) - ٥}{٧س} \times \frac{(س+٥)^٤ - ٥^٤}{(س+٥) - ٥} \right) = \frac{١}{٧} \times ٤ \times ٥^٣ = \frac{٥٠٠}{٧}$

يمكن الحل أيضاً باستخدام نتيجه على نظرية (٤)

$\frac{١}{٧} \lim_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٥^٤}{س} = \frac{١}{٧} \times ٤ \times ٥^{٤-١} = \frac{٥٠٠}{٧}$

تدريب (١٥)

أوجد: $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س+٣)^٣ - ٢٧}{٢س}$

مثال (١٦)

أوجد : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ + س^٣ - ٤٠}{س - ٢}$

الحل

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢ + س^٣ - ٨}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س - ٢} + \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٢^٣}{س - ٢}$

$= ٥ \times ٢^٤ + ٣ \times ٢^٢ = ٩٢$

ملحوظة : يمكن حل المثال السابق باستخدام القسمه المطولة

تدريب (١٦)

أوجد : $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ + س^٢ - ٩٠}{س - ٣}$



حلول التدريبات

رقم التدريب	الاجابة	رقم التدريب	الاجابة
١	١٧	٩	٨٠
٢	٧	١٠	٢٠
٣	٣	١١	ـ ١١٥٢
٤	ـ ٦	١٢	٣
٥	$\frac{-١٢}{٧}$	١٣	$\frac{١}{١٤٥٨}$
٦	$\frac{٩}{٤}$	١٤	$\frac{٤٤٨}{٣}$
٧	$\frac{١}{٤}$	١٥	٢٧
٨	$\frac{٢}{٣}$	١٦	١١٤

تمارين على الدرس الثاني

١) إذا كان $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٧ س + ك}{س - ١} = - ٤$ فإن ك =............

Ⓐ ٣ Ⓑ ٤ Ⓒ ٥ Ⓓ ٦

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

٢) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ٤ (د) صفر

٣) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٢٠٢٣} + ١}{س + ١} =$ ....

(أ) ٢٠٢٣ (ب) ٢٠٢٢ (ج) – ٢٠٢٣ (د) – ٢٠٢٢

٤) $\lim\limits_{س \to ١} \left(\frac{س}{س^٢ - ١} - \frac{١}{س^٢ - ١} \right) =$ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ١ (د) ٢

٥) إذا كان $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ب س}{س} = ١$ فإن $\lim\limits_{س \to ٠}$ ب =............

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٦) إذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{أ}}{\text{س} - ٣} = ٦$ فإن $\underset{\text{س} \leftarrow ٦}{\text{نهـا}} \text{أ} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٩

٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ٧}{\text{س} - ١} =$ ....

(أ) ٧ (ب) ١٤ (ج) ١٥ (د) ١٦

٨) إذا كان $\text{د(س)} = \text{س}^{٢} + ٥$ فإن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(س)} - \text{د(١)}}{\text{س} - ١} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٢ (د) صفر

٩) إذا كان $\text{د(س)} = ٣\text{س} + ١$ فإن $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(س+هـ)} - \text{د(س)}}{\text{هـ}} =$ ....

(أ) ١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

١٠) $\underset{\text{و} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + ٥\text{و})^{٩} - ١}{٣\text{و}} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٨ (د) ١٥

١١) $\underset{\text{س} \leftarrow \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - ٢\sqrt{٢}}{\text{س}^{٢} - ٢} =$ ....

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$ (ج) $\frac{٢}{٣}\sqrt{٢}$ (د) صفر

١٢) إذا كان د(س) = $\frac{١}{س}$: س ≠ صفر ، ر(س) = $\frac{-١}{س}$: س ≠ صفر فإن

نهـــا (د + ر) (س) = ...
س ← ٠

(أ) صفر (ب) غير موجودة (جـ) ١ (د) ـ ١

١٣) إذا كان د(س) = $\frac{س^{٥} - ك}{س - ٢}$ وكان

نهـــا د (س) = ٦٤ **فإن ك =.......**
س ← ٢

(أ) ٢ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٨

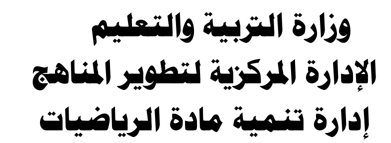
حلول تمارين الدرس الثاني

١) د ٢) أ ٣) أ ٤) ب ٥) ب

٦) د ٧) د ٨) جـ ٩) د ١٠) د

١١) ب ١٢) أ ١٣) جـ





الدرس الثالث : نهاية الدالة عند اللانهاية

مفاهيم اساسية: نظرية (١) $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـــا}} \frac{١}{س} = \text{صفر}$

نتائج هامة ١) $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـــا}} \frac{أ}{} = \text{صفر}$ ٢) $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـــا}} \frac{أ}{} = \text{صفر}$ ، ن $\in$ ع$_+$:أثابت

مثال محلول (١): أوجد: $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـــا}} \frac{٢ \quad ٣}{٣ \quad ٦-}$

الحـــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على

$\underset{\infty \leftarrow س}{\text{نهـــا}} \frac{٢ \quad ٣}{٣ \quad ٦-} = \underset{\infty \leftarrow س}{\text{نهـــا}} \frac{٢ \quad \frac{٣}{}}{٣ \quad \frac{٦}{}} = \frac{٢ \quad ٠}{٣ \quad ٠-} = \frac{٢}{٣}$

تدريب (١): أوجد: $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـــا}} \frac{٥ \quad ٢}{٧ \quad ٢-}$

مثال محلول (٢): $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـــا}}$ (س^٣ ٧ س^٢ ٢)

الحـــــــــــل

بأخذ س^٣ عامل مشترك :

$\underset{\infty \leftarrow س}{\text{نهـــا}}$ س^٣ (١ $\frac{٧}{}$ $\frac{٣}{٢}$) $= \infty$ (١+٠+٠) $= \infty$

تدريب (٢): $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـــا}}$ (٣ - ٤ ^{٣})

ملاحظات: عند إيجاد نها $\frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث د(س) ، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن :

١) النهايه = عدد حقيقى لا يساوي الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام .

٢) النهايه = صفر إذا كامنت درجة البسط أصغر من درجة المقام .

٣) النهاية = $\pm \infty$ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام .

مثال محلول (٣): أوجد : $\lim\limits_{\to \infty} \frac{٣\quad ^{٢}-٥\quad ١}{٢\quad ٣}$

الحـــــــــــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على

$$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣\quad ^{٢}\quad ٥\quad ١}{٢\quad ٣} = \lim\limits_{\to \infty} \frac{٣\quad ٥\quad \frac{١}{}}{٢\quad \frac{٣}{}} = \frac{(\infty -٥ +\text{صفر})}{٢+\text{صفر}} = \infty$$

تدريب (٣): أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥\quad -٧\quad ^{٢}}{٣\quad +١}$

مثال محلول (٤):

أوجد: $\lim\limits_{\to \infty} \frac{٥\quad ^{٢}+٣\quad +١}{٢\quad ^{٣}+٧}$

الحـــــــــــــــــــــــــــل

.بقسمة كل من البسط و المقام على $س^{٣}$:

$$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥\quad ^{٢}+٣\quad +١}{٢\quad ^{٣}+٧} = \lim\limits_{\to \infty} \frac{\frac{٥}{}\quad \frac{٣}{٢}\quad \frac{١}{٣}}{٢\quad \frac{٧}{٢}} = \frac{٠+٠+٠}{٢\ +٠} = \text{صفر}$$

تدريب (٤) أوجد : $\lim\limits_{\to \infty} \frac{٥\quad ٣\quad ^{٢}}{٢\quad ^{٣}+٧\quad -٧}$

مثال محلول (٥)

أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{(٣\quad -٥)(٢\quad +١)}{^{٢}-٣\quad ٢}$



الحـــــــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$

$$\text{نهـــا}_{\infty \leftarrow} \frac{(٣ \quad \frac{٥}{}\,)(٢ \quad \frac{١}{}\,)}{١ - \frac{٣}{} \quad \frac{٢}{٢}} = \text{نهـــا}_{\infty \leftarrow} \frac{(٣-٠)(٢+٠)}{١-٠+٠} = ٦$$

تدريب (٥)

أوجد : $\text{نهـــا}_{\infty \leftarrow} \frac{(٤ \quad -٥)(\quad -٣)}{٢ \quad ٣+ \quad ٢}$

مثال محلول (٦)

أوجد : $\text{نهـــا}_{\infty \leftarrow} \frac{\sqrt[٣]{٨ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٢}}{\sqrt{٩ \quad ٢ \quad ٣}}$

الحـــــــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على

$$\text{نهـــا}_{\infty \leftarrow} \frac{\sqrt[٣]{٨ \quad \frac{٤}{٢} \quad \frac{٢}{٣}}}{\sqrt{٩ \quad \frac{٣}{٢}}} = \frac{\sqrt[٣]{٨+٠-٠}}{\sqrt{٩-٠}} = \frac{٢}{٣}$$

تدريب (٦):

أوجد : $\text{نهـــا}_{\infty \leftarrow} \frac{٢ \quad -٥}{\sqrt{٤ \quad ^{٢}+٢ \quad +١}}$

مثال محلول (٧)

أوجد : $\text{نهـــا}_{س \to \infty} (٣ \quad ^{-٥} \quad ٤ \quad ^{-٢} \quad ٥)$

الحـــــــــــــــــــــــل

$$\text{نهـــا}_{\infty \leftarrow} \left(\frac{٣}{٥} \quad \frac{٤}{٢} \quad ٥ \right) = (٠+٠+٥) = ٥$$

تدريب (٧):

أوجد : $\text{نهـــا}_{س \to \infty} (٢ \quad ^{-٣} \quad ٣ \quad ^{-٤} \quad ٦)$



حلـول التدريبات

رقم التدريب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الاجابة	$\frac{٥}{٧}$	ـ ∞	ـ ∞	صفر	$\frac{٤}{٣}$	١	ـ ٦



وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
إدارة تنمية مادة الرياضيات

تمارين على الدرس الثالث

١) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣س^٢ + ٧}{٥س - ١} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) ∞

٢) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥س - ١}{٣س^٢ + ٧} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) ∞

٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥س^٢ - ١}{٣س^٢ + ٧} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) ∞

٤) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{س}{س^٢ - ١} - \frac{١}{س^٢ - ١} \right) =$ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ١ (د) ∞

٥) إذا كان $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ س + ١}{٢س + ٥} = -٣$ فإن أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ـ ٣ (د) ـ ٦

٦) $\lim_{س \to \infty} (١ + س^٢ - س^٣) = ...$

أ) صفر　　ب) ١　　ج) ∞　　د) $-\infty$

٧) $\lim_{س \to \infty} (١ + س^{-٢} - س^{-٣}) = ...$

أ) صفر　　ب) ١　　ج) ∞　　د) $-\infty$

٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{س - س\sqrt{س}}{س} = ...$

أ) صفر　　ب) ١　　ج) ∞　　د) $-\infty$

٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^٢ + ١}}{|س|} = ...$

أ) صفر　　ب) ١　　ج) ∞　　د) $-\infty$

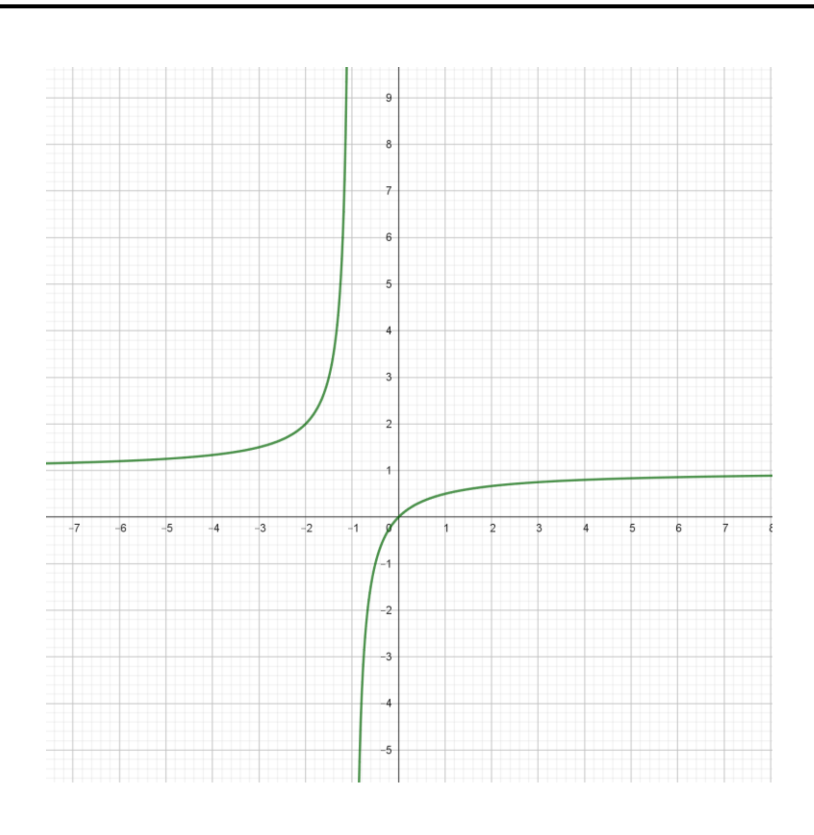
١٠) $\lim_{هـ \to \infty} (\sqrt{هـ^٢ + ١} - هـ) = ...$

أ) صفر　　ب) ١　　ج) ∞　　د) $-\infty$

١١) إذا كان الشكل المقابل

يمثل الشكل البياني للدالة د فإن

$\lim_{س \to \infty}$ د(س) =..........



أ) صفر

ب) ١

جـ) ∞

د) $-\infty$

حلول تمارين الدرس الثالث

١) د	٢) جـ	٣) ب	٤) أ	٥) د
٦) د	٧) ب	٨) د	٩) ب	١٠) أ
١١) ب				

تمارين عامة على الوحدة الثالثة

١) إذا كان $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{ب س} - ٨}{\text{س} - ٢} = ٦$ فإن ب = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) ٦

٢) $\underset{\text{س} \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٣}{\text{س} - ٨} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{١}{٨}$

٣) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - \sqrt{\text{س} + ١٥}}{\text{س} - ١} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $-\frac{١}{٤}$ (د) $-\frac{١}{٦}$

٤) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٣} - ١} - \dfrac{١}{\text{س}^{٣} - ١} \right) =$ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) ٣

٥) إذا كان $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{ب س} + ٦}{\text{س} - ٢} = -١$ فإن ب = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -٤ (د) -٥

٦) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{١٠١} + س^{٥١} - ٢}{س - ١}$ = ...

(أ) ١٠١ (ب) ٥١ (ج) ١٥٢ (د) ١٥٠

٧) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٣س^{٥} + ٥ س^{٣} - ٨}{س - ١}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) ٢٤ (ج) ٣٠ (د) ٣٢

٨) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{١١} + ٥ س^{٧} - ٦}{س - ١}$ = ...

(أ) ١١ (ب) ٧ (ج) ٧٧ (د) ٤٦

٩) إذا كان د(س) = $س^{٩} + ١$ فإن $\lim\limits_{س \to ١} \frac{د(س) - د(١)}{س - ١}$ = ...

(أ) ٩ (ب) ٨ (ج) ١ (د) صفر

١٠) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٤س^{٢} + ٣ س}{٢ س^{٢} - ١}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) صفر (د) ∞

١١) إذا كان $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{ب س + ٢}{٣س + ١}$ = ٤ فإن ب = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٢



١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \text{س}^{٢} - \text{س}^{٣} \right) =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}}{|\text{س} + ١|} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

١٤) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}}{|\text{س} + ١|} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (ء) $-\infty$

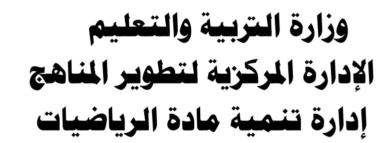
١٥) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}(٤\text{س} + ١)(٣\text{س} - ١)}{٢\text{س}^{٣}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٦ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ∞

حلول التمارين العامة

حلول الاسئلة الموضوعية

١) ب	٢) ب	٣) ج	٤) ب	٥) د
٦) ج	٧) ج	٨) د	٩) أ	١٠) أ
١١) د	١٢) د	١٣) ب	١٤) ب	١٥) د





الصف الثاني – القسم الادبي - الاختبار الاول على الوحدة الثالثة

اولا: الاسئلة الموضوعية :

في البنود من (١ : ١٠) لكل بند أربع خيارات احداها فقط صحيحة ظلل دائرة الاختيار الصحيح

١) إذا كان $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٣ ، $\lim_{س \to ١}$ ر(س) = ـ ٤ فإن

$\lim_{س \to ١}$ [د(س) ـ ر(س)]^{٢} = ...

Ⓐ ١   Ⓑ ٧   Ⓒ ٢٥   Ⓓ ٤٩

(أ) ١   (ب) ٧   (ج) ٢٥   (د) ٤٩

٢) $\lim_{س \to ٧} \frac{س^{٢} - ٤٩}{س - ٧}$ = ...

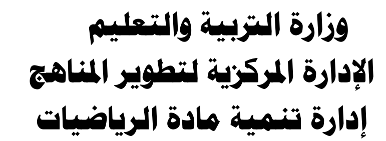
(أ) صفر   (ب) ٧   (ج) ١٤   (د) غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س}$ = ...

(أ) ١   (ب) صفر   (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ س + ١}{٥س - ٧}$ = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (ج) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٣}$





٥) $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٥س + ٣}{\sqrt{٤س^{٢} - ٣}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٢}$ (ج) $\frac{٥}{٤}$ (د) غير موجودة

٦) $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}\pi}{نهـا} \frac{جا\ س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) $\frac{١}{٢}\pi$ (د) $\frac{٢}{\pi}$

٧) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٤} - ٢}{س^{٢}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) غير موجودة

٨) $\underset{س \leftarrow -١}{نهـا} \frac{٥س^{٣} + ٤س^{٢} + ١}{س + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) -١ (ج) ٧ (د) -٧

٩) $\underset{س \leftarrow -٣}{نهـا} \frac{س^{٢} - ٤س - ٢١}{س + ٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) -٣ (ج) -٧ (د) -١٠

١٠) $\lim\limits_{س \to \sqrt{٢}} \dfrac{س^{٢} - ٢}{س^{٣} - ٢\sqrt{٢}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\dfrac{٢}{٣}$ (ج) $\dfrac{\sqrt{٢}}{٣}$ (د) $\sqrt{٢}$

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) إذا كان

$\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{ك\, س - ١}{٥س - ٧} = ٢$ ، فعين قيمة ك

٢) إذا كان

$\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٢} + ٢\, س + ك}{س - ٢} = ٦$ ، فعين قيمة ك



حل الاختبار الأول على الوحدة الثالثة (القسم الادبي)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

١) د　　٢) جـ　　٣) جـ　　٤) جـ　　٥) ب

٦) د　　٧) ب　　٨) جـ　　٩) د　　١٠) جـ

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) ك = ١٠　　　　٢) ك = ـ ٨



الصف الثاني – القسم الادبي - الاختبار الثاني على الوحدة الثالثة

اولا: الاسئلة الموضوعية :

في البنود من (١ : ١٠) لكل بند أربع خيارات احداها فقط صحيحة ظلل دائرة الاختيار الصحيح

١) إذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٠٠} + س^{٥٠} + ك}{س - ١} = ١٥٠$ فإن ك = ...

(أ) ١ (ب) ـ ١ (ج) ٢ (د) ـ ٢

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} =$ ....

(أ) ـ ١ (ب) ٢ (ج) ـ٢ (د) غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٥} \frac{٣ - \sqrt{س + ٤}}{س - ٥} =$ ....

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - ظا س}{١ + جتا ٣ س} =$ ....

(أ) $-\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

٥) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٣}}{س^{٢} + ٢} - س \right)$ = ...

(أ) صفر (ب) ∞ (ج) $-\infty$ (د) غير موجودة

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{٣س^{٥} + ٥س^{٣} - ٨}{س - ١}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٥ (ج) ٣٠ (د) غير موجودة

٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{س(س+١)(٢س+٣)(٣س+٤)(٤س+٥)}{١٢س^{٥}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (ء) $\frac{١}{٢}$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{س} - ١}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (ج) ٢ (د) -٢

٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢ س^٢ + س}{س^٢ - ١} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٣ (د) ٤

١٠) أذا كانت د(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + س - ٢}$ فإن الدالة د لها نهاية

عندما س ← ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -١ (د) جميع ما سبق

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) إذا كان

$\lim_{س \to \infty} \frac{ل س + ٩}{٢ س - ٧} =$ صفر ، فعين قيمة ل

٢) إذا كان

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢ س + ٢ ك}{س - ٢} = ٦$ ، فعين قيمة ك



حل الاختبار االثاني على الوحدة الثالثة (القسم الادبي)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

١) د	٢) ب	٣) أ	٤) جـ	٥) أ
٦) جـ	٧) جـ	٨) جـ	٩) أ	١٠) د

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) ل = صفر ٢) ك = ـ ٤



رياضيات عامة

الصف الثانى الثانوى (أدبى)

الوحدة الرابعة(حساب المثلثات)

المحتويات

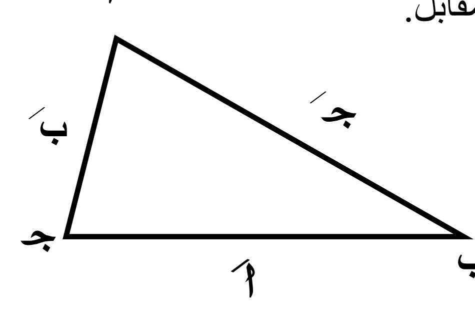


الصف الثاني الثانوي – القسم الأدبى
الوحدة الرابعة – حساب المثلثات

الدرس الأول: قانون (قاعدة) الجيب

المفاهيم الاساسية للدرس:

فى المثلث أب جـ استخدمنا الرموز أَ ، بَ ، جـَ للدلالة على أطوال الاضلاع المقابلة للزوايا أ، ب ، جـ على الترتيب كما بالشكل المقابل.



قاعدة الجيب

فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة

أي أن : $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ}$

أمثلة محلولة

مثال (١):

أب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) = ٤٤ ° ، ق (∠ ب) = ٥٦ ° ، جـَ = ٥,٦ سم أوجد أَ لأقرب رقمين عشريين.

الحل :

ق(∠ جـ) = ١٨٠ ° – (٤٤° + ٥٦ °) = ٨٠ °

∵ $\frac{أَ}{جا ٤٤} = \frac{بَ}{جا ٥٦} = \frac{٥,٦}{جا ٨٠}$

∴ أَ = $\frac{٥,٦ \times جا ٤٤°}{جا ٨٠ °} \simeq$ ٣,٩٥ سم

تدريب (١)

س ص ع مثلث فيه ق (∠ س) = ٤٦ ° ، ق (∠ ص) = ٨٥ ° ، عَ = ٤,٨ سم أوجد سَ لأقرب رقم عشرى.



مثال (٢):

أب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) = ٤٧ ° ، ق (∠ جـ) = ٥٦ ° ، إذا كان محيط المثلث = ٣٠ سم أوجد أَ لأقرب رقم عشرى .

الحل :

ق (∠ ب) = ١٨٠ ° − (٤٧° + ٥٦ °) = ٧٧ °

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ٤٧}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٧٧}} = \frac{\text{جَـ}}{\text{جا ٥٦}} = \frac{\text{أَ + بَ + جَـ}}{\text{جا ٤٧+جا ٧٧+جا ٥٦}} = \frac{٣٠}{٢,٥٣}$

∴ $\text{أَ} = \frac{\text{٣٠ × جا ٤٧ °}}{٢,٥٣} \simeq$ ٨,٧ سم

تدريب (٢)

أب جـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ٥٥ ° ، ق (∠ جـ) = ٧٧ ° ، إذا كان محيط المثلث = ٨٠ سم أوجد بَ لأقرب رقم عشرى

تمرين مشهور

فى أى مثلث أ ب جـ يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَـ}}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجه للمثلث أ ب جـ .

مثال (٣):

أب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) = ٥٥ ° ، ق (∠ ب) = ٧٤ ° ، جـَ = ٨,٦ سم أوجد :

١) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أب جـ

٢) مساحة سطح المثلث أب جـ

الحل

ق(∠ جـ) = ١٨٠ ° − (٥٥° + ٧٤ °) = ٥١ °

$\frac{\text{أَ}}{\text{جا ٥٥}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٧٤}} = \frac{٨,٦}{\text{جا ٥١}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٨,٦}{\text{جا ٥١}}$ ÷ ٢ = ٥,٥سم

أَ = $\frac{٨,٦ \times \text{جا } ٥٥°}{\text{جا } ٥١°}$ = ٩,١ سم

مساحة سطح المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ × أَ × جـَ × جا ب = $\frac{١}{٢}$ × ٩,١×٨,٦ جا ٧٤°

= ٣٧,٦ سم^{٢}

تدريب (٣):

أب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ب) = ٣٥° ، جـَ = ١٢سم أوجد :

١) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أب جـ ٢) مساحة سطح المثلث أب جـ

مثال (٤):

فى الشكل المقابل إذا كان طول قطر الدائرة م يساوي ١٠سم ، ق (∠ ب م جـ) = ١٢٠°

أوجد أَ

أ م ب جـ

الحل

ق (∠ ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ب م جـ) = ١٢٠° ÷ ٢ = ٦٠°

قياس الزاوية المحيطية تساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا } ٦٠}$ = ١٠ ∴ أَ = ١٠ جا ٦٠ = ٥$\sqrt{٣}$ سم

تدريب (٤):

أ وجد محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أب جـ المتساوى الاضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم

مثال (٥):

إذا كان محيط الدائرة الخارجة للمثلث أب جـ يساوى ١٠ π سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠°

فأوجد بَ

الحل

محيط الدائرة = ٢ π نق = ١٠ π   ∴ نق = ٥ سم

∵ $\frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{ب}'}{\text{جا ١٢٠}}$ = ١٠   ∴ ب' = ١٠ جا ١٢٠ = ٥$\sqrt{٣}$ سم

تدريب (٥):

إذا كان محيط الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ يساوى ٨ π سم ، ق (∠ جـ) = ٣٠ °

فأوجد جـ'

مثال (٦):

فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٦٠ ° ، أ' = ٢١ سم ، أوجد مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ ، حيث π ≃ $\frac{٢٢}{٧}$

الحل

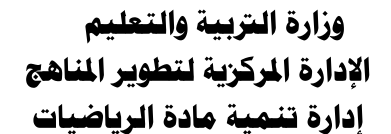
∵ $\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق   ∴ $\frac{٢١}{\text{جا ٦٠}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٢١}{\text{جا ٦٠}}$ ÷ ٢ = ٧$\sqrt{٣}$ سم

∴ مساحة سطح الدائرة = π نق^{٢} = $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧$\sqrt{٣}$)^{٢} = ٤٦٢ سم^{٢}

تدريب (٦):

فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٣٠ ° ، أ' = ١٤ سم ، أوجد طول مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث حيث π ≃ $\frac{٢٢}{٧}$





حل المثلث بأستخدام قانون الجيب

ملاحظة

يتكون المثلث من ستة عناصر هي :

١) ثلاثة أضلاع.

٢) ثلاث زوايا

المقصود بحل المثلث هو إيجاد قيم عناصره المجهولة

أولا : حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياس زاويتين

مثال (٧):

حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ١٠٠ °، ق (∠ جـ) = ٢٣ °، أَ = ٨,٤ سم

الحل :

ق(∠ ب) = ١٨٠ ° − (١٠٠° + ٢٣ °) = ٥٧ °

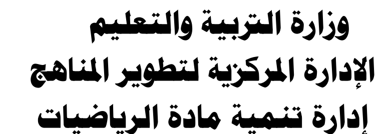
$$\because \quad \frac{\text{٨,٤}}{\text{جا١٠٠}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٥٧}} = \frac{\text{جَـ}}{\text{جا ٢٣}}$$

$$\therefore \quad \text{بَ} = \frac{\text{٨,٤×جا ٥٧ °}}{\text{جا ١٠٠ °}} = \text{٧,١٥ سم} \quad ، \quad \text{جَـ} = \frac{\text{٨,٤ ×جا ٢٣ °}}{\text{جا ١٠٠ °}} = \text{٣,٣٣ سم}$$

تدريب (٧):

حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٣٢ °، ق (∠ ب) = ٤٥ °، أَ = ٦,٢ سم





حلول التدريبات على قانون الجيب:

حل تدريب (١): سَ = ٤,٦ سم

حل تدريب (٢): بَ = ٢٥,٨ سم

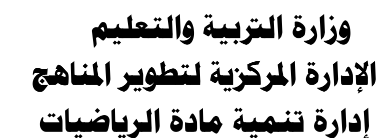
حل تدريب (٣): نق = ١٢ سم ، مساحة سطح المثلث أ ب جـ = ٣١,٦٦ سم^{٢}

حل تدريب (٤): محيط الدائرة = $٤\sqrt{٣}\,\pi$ سم

حل تدريب (٥): جـَ = ٤ سم

حل تدريب (٦): مساحة سطح الدائرة = **٦١٦** سم^{٢}





تمارين على قانون الجيب

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

١) فى المثلث أ ب جـ يكون المقدار أَ جا جـ مساويا ....

أ) أَ جا أ　　ب) بَ جا ب　　جـ) جـَ جا أ　　د) ب جـَ جا أ

٢) طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ ب) = ٣٠ ° ، بَ = ٥سم يساوى ....

أ) ٥　　ب) ١٠　　جـ) ١٥　　د) ٢٠

٣) فى المثلث د هـ و إذا كان : $\frac{١}{٢}$ جا د = $\frac{١}{٣}$ جا هـ = $\frac{١}{٤}$ جا و　فإن:

دَ : هـَ : وَ = ...: ...... : ......

أ) ٢:٣:٤　　ب) ٤:٣:٢　　جـ) ٢:٤:٣　　د) ٤:٢:٣

٤) فى المثلث أ ب جـ　إذا كان　٢جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا جـ　فإن :

أَ : بَ : جـَ = ...: ...... : ......

أ) ٣:٤:٦　　ب) ٢:٣:٤　　جـ) ٤:٣:٢　　د) ٦:٤:٣

٥) فى المثلث أ ب جـ　إذا كان ق (∠ أ) = ١٠٣°، أَ = ٧سم ، ق (∠ ب) = ٣٧ ° فإن

جـَ = ...سم

أ) ٤,٦　　ب) ٦,٤　　جـ) ٨,٢　　د) ١٠,٦

٦) فى الم فى المثلث د هـ و إذا كان ق (∠ د) = ٣٠ ° ، دَ= ٤سم ، فإن نصف قطر الدائرة الخارجه للمثلث = ...سم

أ) ١٦　　ب) ٨　　جـ) ٤　　د) ٢



٧) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق (∠ أ) = ٧٥ °، جـ َ=١٠سم ، أ َ = ب َ فإن :

مساحة سطح المثلث أ ب جـ ≃ سم٢

أ) ٩٣ ب) ١٨٧ جـ) ٤٧ د) ٦٢

٨) فى المثلث أ ب جـ إذا كان $\frac{٣}{جا أ}$ = $\frac{٤}{جا ب}$ = $\frac{٥}{٢جا جـ}$

فإن أ َ : ب َ : جـ َ = ...: ...... : ......

أ) ٣:٤:٥ ب) ٦:٨:٥ جـ) ٥:٨:٦ د) ٥:٤:٣

٩) فى المثلث س ص ع إذا كان :ق (∠ س) : ق (∠ ص) :ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ٤ ،

س َ = ٧,٥ سم فإن مساحة سطح المثلث ≃ ...... سم ٢

أ) ٣٧ ب) ٧٤ جـ) ٢٤ د) ٣٢

١٠) مساحة سطح المثلث أ ب جـ = جا أ جا ب جا جـ × ......

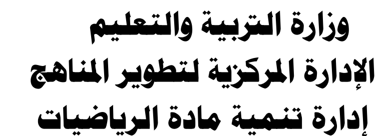
أ) ٤ نق ٢ ب) ٢ نق جـ) ٢ نق ٢ د) نق ٢

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث

حلول التمارين

١)	٢)	٣)	٤)	٥)	٦)	٧)	٨)	٩)	١٠)
جـ)	ب)	أ)	د)	أ)	جـ)	أ)	ب)	أ)	جـ)



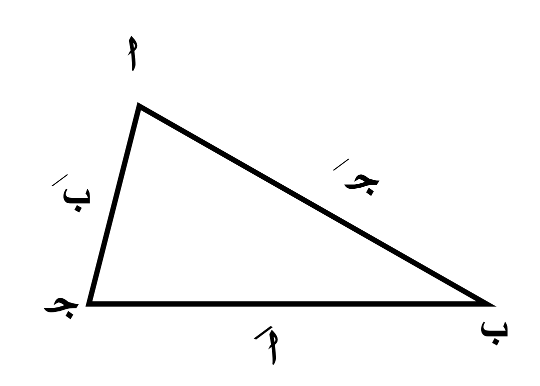


الدرس الثانى: قانون (قاعدة) جيب التمام

سوف نتعلم :(١) قانون أو قاعدة جيب التمام لأى مثلث

(٢) استخدام قاعدة جيب التمام فى حل المثلث

قانون (قاعدة) جيب التمام :



فى أى مثلث أ ب جـ يكون :

$$\text{أَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{جـَ}^2 - 2\,\text{بَ}\,\text{جـَ}\,\text{جتا أ}$$

$$\text{بَ}^2 = \text{جـَ}^2 + \text{أَ}^2 - 2\,\text{جـَ}\,\text{أَ}\,\text{جتا ب}$$

$$\text{جـَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - 2\,\text{أَ}\,\text{بَ}\,\text{جتا جـ}$$

ومنها :

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{جـَ}^2 - \text{أَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{جـَ}} \quad ، \quad \text{جتا ب} = \frac{\text{جـَ}^2 + \text{أَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{جـَ}\,\text{أَ}} \quad ، \quad \text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جـَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{أَ}}$$

أمثلة محلولة

مثال (١):

أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث أ ب جـ حيث أَ =٣ سم ، بَ =٥سم ، جـَ = ٧ سم

الحل :

∵أكبر زاوية في المثلث في القياس تقابل أكبر ضلع في الطول من أضلاع المثلث .

∵ جـَ > بَ > أَ ∴ ∠ جـ هي أكبر زوايا المثلث في القياس

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{جـَ}^2}{2\,\text{بَ}\,\text{أَ}} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$$

∴ ق (∠ جـ) = ١٢٠°



تدريب (١)

أ ب جـ مثلث فيه أ َ = ١٢سم ، ب َ = ٢٠سم ، جـ َ = ٢٦سم أوجد قياس اصغر زاوية فى المثلث.

مثال (٢):

أ ب جـ مثلث فيه أ َ = ٢٠ سم ، ب َ = ١٥سم ، ق (∠ جـ) = ٦٠° أحسب جـ َ

الحل :

جـ َ^٢ = أ َ^٢ + ب َ^٢ - ٢ أ َ ب َ جتا جـ

= ٢٠^٢ + ١٥^٢ - ٢ × ٢٠ × ١٥ جتا ٦٠° = ٣٢٥

∴ جـ َ = ٥ √١٣ سم

تدريب (٢)

أ ب جـ مثلث فيه أ َ = ٨ سم ، جـ َ = ٦سم ، ق (∠ ب) = ٦٠° أحسب ب َ

استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلث

أولا: حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

مثال (٣)

حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ َ = ١١ سم ، ب َ = ٥سم ، ق (∠ جـ) = ٢٠°

الحل :

جـ َ^٢ = أ َ^٢ + ب َ^٢ - ٢ أ َ ب َ جتا جـ

= ١١^٢ + ٥^٢ - ٢ × ١١ × ٥ جتا ٢٠° = ٤٢٫٦٣ ∴ جـ َ = ٦٫٥٢٩ سم



∵ جتا أ = $\frac{ب^{\prime 2} + جـ^{\prime 2} - أ^{\prime 2}}{2 ب^\prime جـ^\prime}$ = (٥)^2 + ٥٢٩) = - ٠,٨١٧

ق (∠ أ) = ١٤٤° ٤٩´

ق (∠ ب) = ١٨٠° - (١٤٤° ٤٩´ + ٢٠°) = ١١´ ١٥°

تدريب (٣)

حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ´ = ٢٤,٦ سم ، جـ´ = ١٤,٢سم ، ق (∠ ب) = ١٨´ ٤٢°

ثانيا: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال (٤) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ´ = ٤سم ، ب´ = ٤ $\sqrt{3}$ سم ، جـ´ = ٨سم

الحل :

∵ جتا أ = $\frac{ب^{\prime 2} + جـ^{\prime 2} - أ^{\prime 2}}{2 ب^\prime جـ^\prime}$ = $\frac{(4\sqrt{3})^2 + (8)^2 - (4)^2}{2 \times 4\sqrt{3} \times 8}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ق (∠ أ) = ٣٠°

∵ جتا ب = $\frac{جـ^{\prime 2} + أ^{\prime 2} - ب^{\prime 2}}{2 جـ^\prime أ^\prime}$ = $\frac{(8)^2 + (4)^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \times 8 \times 4}$ = $\frac{1}{2}$

ق (∠ ب) = ٦٠° ∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° - (٦٠° + ٣٠°) = ٩٠°

تدريب (٤)

حل المثلث ٲ ب جـ الذى فيه ٲَ = ١٢,٢سم ، بَ = ١٨,٤ سم ، جـَ = ٢١,١سم

مثال (٥):

فى الشكل المقابل : ٲ ب جـ د متوازى أضلاع فيه :

ق(∠ ٲ ب د)=٨٠° ، ب د = ٧سم ، ٲ ب = ٥سم

أوجد محيط متوازى الاضلاع لأقرب سم .

د ٲ
٧سم ٨٠° ٥سم
جـ ب



فى المثلث ٲ ب د :

(ٲ د)^{٢}= (ٲ ب)^{٢} + (ب د)^{٢} ـ٢ ٲ ب × ب د جتا د

= ٥^{٢} + ٧^{٢} ـ ٢ ×٥×٧ جتا ٨٠°

ٲ د = ٧,٩سم

∴ محيط متوازى الاضلاع = ٢ (ٲ د + ٲ ب)

= ٢ (٧,٩ + ٥) ≃ ٢٦سم

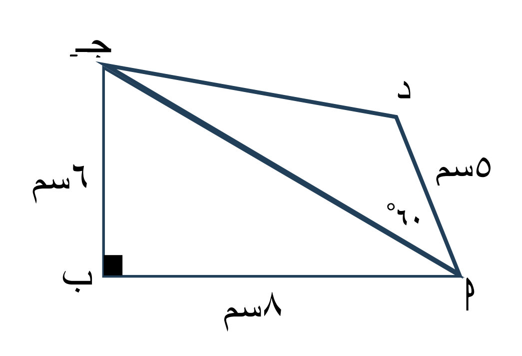
تدريب (٥)

فى الشكل المقابل : ٲ ب جـ د شكل رباعى فيه :

ق(∠ جـ ٲ د)=٦٠° ، ق(∠ ٲ ب جـ)=٩٠° ،

ٲ د = ٥سم ، ٲ ب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم

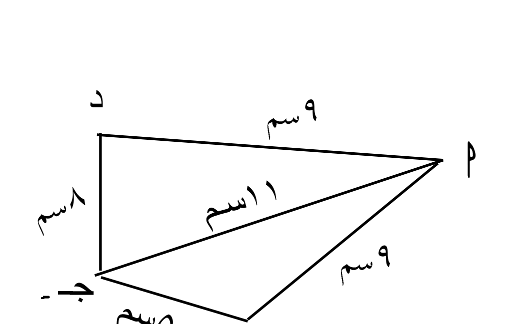
أوجد محيط الشكل ٲ ب جـ د لأقرب سم .



مثال (٦)

ﻢب جـ د شكل رباعى فيه : ﻢب = ٩سم ، ب جـ= ٥سم ، جـ د= ٨سم ، ﻢ د = ٩سم ، ﻢجـ = ١١ سم ، أثبت أن الشكل ﻢب جـ د شكل رباعى دائرى ٠

الحل



فى المثلث ﻢ جـ د

$$\text{جتا د} = \frac{٩^٢ + ٨^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٦}$$

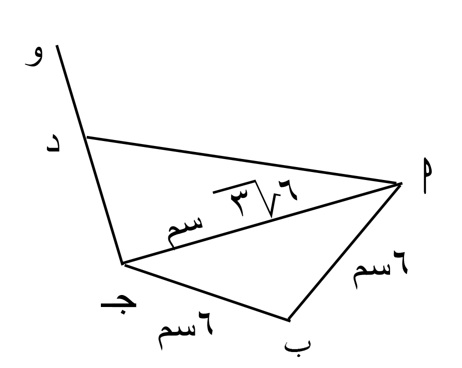
فى المثلث ﻢب جـ

$$\text{جتا ب} = \frac{٩^٢ + ٥^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٥} = -\frac{١}{٦}$$

∵ جتا د = - جتا ب ∴ ق (∠ ب) +ق (∠ د) = ١٨٠ °

∴ الشكل ﻢب جـ د شكل رباعى دائرى

تدريب (٦)



فى الشكل المقابل : اذا كان ﻢب جـ د شكل رباعى دائرى فيه،

ﻢ جـ = $٦\sqrt{٣}$ سم ، ﻢ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٦ سم

أوجد : ق(∠ ﻢ د و)



وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
إدارة تنمية مادة الرياضيات

حلول التدريبات :

(١) ق (∠ أ) = ٣٤ً ٢٠َ ٢٦°

(٢) بَ = ٧,٢سم

(٣) بَ = ١٧سم ، ق (∠ جـ) = ٣٠ً ٦َ ٣٤° ، ق (∠ أ) = ٣٠ً ٣٥َ ١٠٣°

(٤) ق (∠ أ) = ٢٩ً ٧َ ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٥١ً ١٤َ ٦٠°
ق (∠ جـ) = ٢٦ً ٣٨َ ٧٩°

(٥) محيط الشكل أ ب جـ د = ٢٤,٧ سم

(٦) ق (∠ أ د و) = ١٢٠°



تمارين على قانون (قاعدة) جيب التمام

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

(١) فى المثلث ٵ ب جـ إذا كان : ٵَ=٥سم ، بَ = ٧سم ، جـَ = ٨سم فإن ق(∠ ب)= .....

(أ) ٧٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٧٥° (د) ٦٠°

(٢) فى المثلث ٵ ب جـ إذا كان : ٵَ=٣ سم ، بَ = ٥ سم ، ق(∠ ب) = ١٢٠° فإن جـَ=...... سم

(أ) ٥ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ٧

(٣) فى المثلث س ص ع يكون صَ٢ + عَ٢ – سَ٢ = ٢صَ عَ ×........

(أ) جتاس (ب) جاع (جـ) جتاع (د) جاس

(٤) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{مَ^2 + نَ^2 - لَ^2}{2 مَ نَ}$ مساويا :..........

(أ) جتام (ب) جان (جـ) جتال (د) جام

أجب على الاسئلة الاتية:

(٥) مثلث أطوال أضلاعه ١٧،١٣، ١٥ من السنتيمترات أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث.

(٦) ٵ ب جـ د متوازى أضلاع فيه ٵب = ٩سم ، ب جـ= ١٣سم ، ٵ جـ = ٢٠سم ، أوجد طول $\overline{ب د}$

(٧) ٵ ب جـ مثلث محيطه ٧٠سم ، ٵَ= ٢٦سم ، ق(∠ ب) = ٦٠° ، أوجد مساحة سطحة

حلول التمارين: (١) د (٢) د (٣) ٩ (٤) جـ

(٥) ق (∠ ب) = ٥٣ َ ٢٢ ً ٤٧°

(٦) ب د = ١٠سم

(٧) مساحة المثلث = ٢٢٨,٥سم^{٢}



الوحدة الرابعة – حساب مثلثات

تمارين عامة على الوحدة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٵ ب جـ الذي فيه ق(∠ ٵ) = ٣٠°، ٵ/ = ١٠ سم يساوي .... سم

ٵ) ١٠   ب) ٢٠   جـ) ٥   د) ٤٠

٢) محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث ٵ ب جـ الذي فيه ق(∠ ٵ) = ٣٠°، ٵ/ = ١٠ سم يساوي .... سم

ٵ) ١٠ π ب) ٢٠ π جـ) ١٠٠ π د) ٢٥ π

٣) مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ٵ ب جـ الذي فيه ق(∠ ٵ) =٣٠°، ٵ/ = ١٠ سم يساوي .... سم

ٵ) ١٠ π ب) ٢٠ π جـ) ١٠٠ π د) ٢٥ π

٤) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٵ ب جـ الذي فيه ٵ/ = جا ٵ يساوي ....سم

ٵ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) ١   د) ٢

٥) في المثلث ٵ ب جـ إذا كان $\frac{١}{٢}$ جا ٵ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا جـ ، فإن ٵ/ : ب/ : جـ/ =...............

ٵ) ٢ : ٣ : ٤   ب) ٤ : ٢ : ٣   جـ) ٦ : ٤ : ٣   د) ٣ : ٤ : ٦

٦) في المثلث ٢ ب جـ إذا كان ق(∠ ٢) = ٣٠° ، ق(∠ ب) = ٦٠° ، فإن ٢/ : ب/ : جـ/ =..................

٢) ١ : ٢ : ٣ ب) ١ : $\sqrt{٣}$: ٢ جـ) ٣ : ٢ : ١ د) ٢ : $\sqrt{٣}$: ١

٧) في المثلث ٢ ب جـ إذا كان ق(∠ ٢) = ٣٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٢ ب جـ يساوي ٤ سم فإن ٢/ = ...سم

٢) ٢ ب) ٤ $\sqrt{٣}$ جـ) ٤ د) ١٦

٨) في المثلث ٢ ب جـ إذا كان ق(∠ ٢) = ٨٠° ، ق(∠ ب) = ٦٠° ، جـ/ = ١٠ سم فإن : ٢/ =..... لأقرب سم

٢) ١٤ ب) ١٥ جـ) ١٦ د) ١٣

٩) في المثلث ٢ ب جـ إذا كان ق(∠ ٢) =٣٥° ، ٢/ = ٨سم ، ب/ =٦ سم فإن ق(∠ ب) =....° تقريبا

٢) ٢٥ ب) ٣٥ جـ) ١٥ د) ٤٥

١٠) في المثلث ٢ ب جـ إذا كان ٢/ = ٧ سم ، ب/ =٩سم ، ق(∠ جـ) =٣٥° فإن جـ/ =.....

٢) ٢٦,٨ ب) ٥,٢ جـ) ٧,٤ د) ٦,٦

١١) إذا كان ٢/ = ١٨ سم ، ب/ = ٢٤سم ، جـ/ = ٣٠ سم فإن جتا ٢ = ...

٢) $\frac{٣}{٥}$ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) $\frac{٤}{٥}$ د) $\frac{٣}{٤}$

---

١٢) في المثلث ٢ ب جـ إذا كان : $٢' = \sqrt{٣} + ١$ سم ، ب' = ٢سم ، ق(∠ جـ) = ٦٠° فإن
جـ' = ... سم

٢) ٦　　ب) ٢　　جـ) $\sqrt{٦}$　　د) $\sqrt{٢}$

١٣) في اي مثلث ٢ ب جـ يكون جـ' (٢' جتا ب - ب' جتا ٢) = ...

٢) ب'٢ - جـ'٢　　ب) جـ'٢ - ب'٢　　جـ) ٢'٢ - ب'٢　　د) صفر

١٤) في المثلث ٢ ب جـ إذا كان (٢' + ب' + جـ') (٢' + ب' - جـ') = ٢' ب' فإن جتا جـ = ...
٢) $\frac{١}{٢}$　　ب) $-\frac{١}{٢}$　　جـ) صفر　　د) ١

١٥) في المثلث ٢ ب جـ إذا كان ب' = ٨ سم ، جـ' = ٦ سم ، ق(∠ ٢) = ٦٠° فإن ٢' = ...سم
٢) ١٢　　ب) ١٣　　جـ) $\sqrt{٢٦}$　　د) $\sqrt{٥٢}$

حلول التمارين العامة على الوحدة الرابعة

١) ٢	٢) ب	٣) جـ	٤) ٢	٥) ٢
٦) ب	٧) جـ	٨) ب	٩) ٢	١٠) ب
١١) جـ	١٢) جـ	١٣) جـ	١٤) ب	١٥) د

الوحدة الرابعة – حساب مثلثات

الاختبار الاول على الوحدة الرابعة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) إذا كان مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث ٲ ب جـ تساوي ١٠٠ π سم^٢ ، وكان ٯ(∠ ٲ) = ٣٠° فإن ٲ/ = ...سم

ٲ) ١٠ ب) ٨ جـ) ٦ د) ٤

٢) طول أصغر ضلع في المثلث ٲ ب جـ الذي فيه كان ٯ(∠ ٲ) = ٤٣° ، ٯ(∠ ب) = ٦٥° ، جـ/ = ٨,٦ سم يساوى.....سم تقريبا

ٲ) ٦,٢ ب) ٥,٨ جـ) ٧,١ د) ٤,٤

٣) في المثلث ٲ ب جـ إذا كان ٯ(∠ ٲ) = ١٣٣° ، ٲ/ = ١٤سم ، جـ/ = ٧سم فإن مساحة سطح المثلث =.... سم^٢ لأقرب عدد صحيح

ٲ) ١٩ ب) ٢٠ جـ) ٢١ د) ٢٢

٤) في المثلث ٲ ب جـ إذا كان ٲ/ = ٤ سم ، ب/ = ٣ سم ، ٯ(∠ ٲ) = ٦٠° فإن ......

ٲ) جـ/^{٢} + ٣ جـ/ + ٧ = ٠ ب) جـ/^{٢} – ٣ جـ/ – ٧ = ٠
جـ) جـ/^{٢} + ٣ جـ/ – ٧ = ٠ د) جـ/^{٢} – ٣ جـ/ + ٧ = ٠

٥) في المثلث ٲ ب جـ إذا كان (ٲ/ + ب/ + جـ/) (ب/ + جـ/ – ٲ/) = ٢ ب/ جـ/ فإن ......

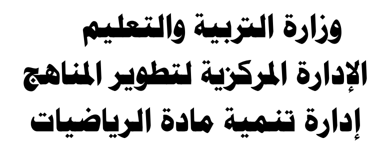
ٲ) المثلث متساوي الاضلاع ب) المثلث متساوي الساقين
جـ) المثلث قائم الزاوية د) المثلث منفرج الزاوية



حلول الاختبار الاول على الوحدة الرابعة

١) أ　　٢) أ　　٣) جـ　　٤) ب　　٥) جـ




وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
إدارة تنمية مادة الرياضيات

الاختبار الثاني على الوحدة الرابعة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) في المثلث أ ب جـ إذا كان أ/ = جا أ فإن مساحة الدائرة المارة برؤوسه =......سم^{٢} .

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) $\frac{١}{٢}\pi$ (د) $\frac{١}{٤}\pi$

٢) في المثلث أ ب جـ إذا كان حا^{٢} أ + حا^{٢} ب = حا^{٢} جـ فإن المثلث يكون ....

(أ) متساوي الاضلاع (ب) متساوي الساقين

(جـ) قائم الزاوية (د) منفرج الزاوية

٣) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث أ ب جـ كنسبة ١ : ٢ : ٣ فإن النسبة بين أطوال اضلاعه هي ....

(أ) ١ : ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٢ : ١ (جـ) ١ : $\sqrt{٣}$: ٢ (د) ٢ : $\sqrt{٣}$: ١

٤) في المثلث أ ب جـ إذا كان أ/ = ٣٦ سم ، ب/ = ٢٥ سم ، ق($\angle$ جـ) = ٨٦° فإن جـ/ = ...سم تقريبا

(أ) ٢٤ (ب) ٤٢ (جـ) ٣٨ (د) ٣٠

٥) مثلث أطوال اضلاعه ٤ سم ، ٥ سم ، ٧ سم فإن قياس أكبر زواياه = ...تقريبا

(أ) ٤٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٠٢ (د) ١٥٢



حلول الاختبار الثاني على الوحدة الرابعة

١) د   ٢) جـ   ٣) جـ   ٤) ب   ٥) جـ